Der Neumannoperator in streng pseudokonvexen Gebieten mit gewichteter Bergmanmetrik

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Christoph H. Lampert

aus

Konstanz

Bonn 2003

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn.

1. Referent: Prof. Dr. I. Lieb

2. Referent: Priv. Doz. Dr. G. Schmalz

Tag der Promotion: 31. März 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Die Thematik

1.1 Das $\bar\partial$-Neumannproblem

Eine zentrale Rolle in der Komplexen Analysis nimmt die Untersuchung der *inhomogenen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* (oder auch kürzer *$\bar\partial$-Gleichung*) ein. Die dabei betrachtete Fragestellung ist: *Es sei eine Differentialform f vorgegeben; ist dann das Differentialgleichungssystem*

$$\bar\partial u = f \tag{1}$$

lösbar? Eine notwendige Bedingung hierfür ist $\bar\partial f = 0$, denn es gilt immer $\bar\partial \circ \bar\partial = 0$, doch die Frage, ob dieses Kriterium auch hinreichend ist, hängt u. a. von der Geometrie des Definitionsgebiets ab und ist bis heute die Motivation zahlreicher Untersuchungen.

Der klassische Ansatz zur Lösung von Gleichung (1) besteht darin, im Hilbertraum L^2 den *Laplace-Beltrami-Operator* (d. h. den komplexen Laplaceoperator) zu studieren:

$$\Box := \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial,$$

wobei $\bar\partial^*$ der zu $\bar\partial$ im Hilbertraumsinn adjungierte Operator ist. Falls $\Box$ ein abgeschlossenes Bild in L^2 besitzt, gewinnen wir eine orthogonale Zerlegung

$$\begin{aligned} L^2 &= \operatorname{im}\Box \oplus \ker\Box \\ &= \operatorname{im}\bar\partial\bar\partial^* \oplus \operatorname{im}\bar\partial^*\bar\partial \oplus \ker\Box, \end{aligned}$$

und aus dieser folgt bereits die Lösbarkeit von Gleichung (1) auf $(\ker\Box)^\perp$, dem orthogonalen Komplement von $\ker\Box$. Zudem können wir einen Operator $\mathbf{N}$,

$$\mathbf{N} : (\ker\Box)^\perp \to (\ker\Box)^\perp,$$

bilden, der invers zum Laplace-Beltrami-Operator ist. Trivial zu einem Operator auf ganz L^2 fortgesetzt wird er als *$\bar\partial$-Neumannoperator* bezeichnet. Die Untersuchung von $\Box$ und die Fragestellung, ob $\operatorname{im}\Box \subset L^2$ abgeschlossen und damit $\mathbf{N}$ definiert ist, bezeichnet man auch als das *$\bar\partial$-Neumannproblem.*

Die Frage der Lösbarkeit der $\bar\partial$-Gleichung und das $\bar\partial$-Neumannproblem sind eng miteinander verknüpft, denn mit $\mathbf{N}$ ist automatisch ein Lösungsoperator für Gleichung (1) gegeben: Der Operator

$$\mathbf{K} := \bar\partial^*\mathbf{N} : L^2 \to (\ker\bar\partial)^\perp$$

hat die Eigenschaft, daß

$$\bar\partial(\mathbf{K}f) = f$$

für $f \in \ker\bar\partial \cap (\ker\Box)^\perp$ ist, stellt also einen Lösungsoperator für $\bar\partial$ dar, dessen Bild zudem orthogonal zu $\ker\bar\partial$ steht. Er ist als solcher eindeutig und wird als *kanonischer Lösungsoperator für $\bar\partial$* bezeichnet.

Seit das $\bar\partial$-Neumannproblem Anfang der 50er Jahre durch Spencer gestellt wurde, war es Gegenstand zahlreicher Untersuchungen, auch deshalb, weil seine Behandlung die Entwicklung einiger gänzlich neuer Methoden in der Komplexen Analysis bewirkte. Für streng pseudokonvexe Gebiete mit glattem Rand wurde das Problem schließlich von Kohn im Jahr 1963 [Koh 63] bzw. 1964 [Koh 64] mit positivem Ergebnis gelöst. Kurz darauf veröffentlichte auch Hörmander seine bekannte Arbeit [Hör 65] über die Lösung der $\bar\partial$-Gleichung auf pseudokonvexen Gebieten, und dank seines Lehrbuchs [Hör 66] wurden die Hilbertraum-Methoden zu einem Standardwerkzeuge der Komplexen Analysis mehrerer Veränderlicher. Das zentrale Ergebnis ist:

Theorem. Es sei M ein streng pseudokonvexes Gebiet in einer komplexen Mannigfaltigkeit X. Dann ist $\operatorname{im}\Box \subset L^2_{p,q}$ abgeschlossen für jedes (p,q) mit $q \geq 1$, und für den zugehörigen Neumannoperator $\mathbf{N}_{p,q}$ gilt:

- $\mathbf{N}_{p,q} : L^2_{p,q} \to L^2_{p,q}$ ist kompakt,
- $\mathbf{N}_{p,q} : C^\infty_{p,q}(\overline{M}) \to C^\infty_{p,q}(\overline{M})$.

Für $q = 0$ gilt zumindest noch

- $\mathbf{N}_{p,0} : L^2_{p,0} \to L^2_{p,0}$ ist beschränkt,
- $\mathbf{N}_{p,0} : \mathcal{D}_{p,0}(M) \to \mathcal{D}_{p,0}(M)$,

und in beiden Fällen erhalten wir:

- $f = \bar\partial\bar\partial^*\mathbf{N}_{p,q}f + \bar\partial^*\bar\partial\mathbf{N}_{p,q}f + \mathbf{H}_{p,q}f \quad$ für alle $f \in L^2_{p,q}$,
- $\mathbf{N}_{p,q}\mathbf{H}_{p,q} = \mathbf{H}_{p,q}\mathbf{N}_{p,q} = 0 \quad$ und $\quad \mathbf{N}_{p,q}\Box = \Box\mathbf{N}_{p,q}$ auf $\operatorname{dom}(\Box)$,
- $\mathbf{N}_{p,q+1}\bar\partial = \bar\partial\mathbf{N}_{p,q}$ auf $\operatorname{dom}\bar\partial \quad$ und $\quad \mathbf{N}_{p,q}\bar\partial^* = \bar\partial^*\mathbf{N}_{p,q+1}$ auf $\operatorname{dom}\bar\partial^*$.

Dabei bezeichnet $\mathbf{H}_{p,q} : L^2_{p,q} \to \ker\Box$ die orthogonale Projektion auf den Kern von $\Box$.

1.2 Integralformeln

Wenn die Existenz eines Lösungsoperators für $\bar\partial$ bereits bekannt ist – wie in der Situation des obigen Theorems – interessiert man sich dafür, inwieweit sich aus zusätzlichen Eigenschaften der rechten Seite f ähnliche Eigenschaften der Lösung folgern lassen, etwa die Beschränktheit in gewissen Normen oder ein besonderes Randverhalten. Es zeigt sich dabei, daß nur gewisse Klassen von Abschätzungen gut mit L^2-Methoden behandelt werden können. Hierzu gehören Regularität in den L^2-Sobolevräumen W^s und C^∞-Abschätzungen. Andere Bereiche, etwa L^∞ und L^p-Abschätzungen oder Regularität in C^k- und Lipschitzräumen lassen sich auf diese Weise nicht ohne weiteres gewinnen.

Dies motivierte Grauert und Lieb in [GrL 70] sowie Henkin in [Hen 70] dazu, einen anderen Zugang zur Lösung der $\bar\partial$-Gleichung zu wählen: Sie konstruierten auf streng pseudokonvexen Gebieten Integraloperatoren mit explizit bekannten Kernen, die als Lösungsoperatoren für $\bar\partial$ wirken. Durch geeignete Abschätzung der Integralkerne kann man dann Aussagen über den Operator in wesentlich mehr Funktionenräumen gewinnen, als dies der abstrakten L^2-Theorie möglich ist. Die auf diese Weise gewonnenen Integraloperatoren stimmten jedoch zunächst nicht mit dem kanonischen Lösungsoperator $\mathbf{K}$ überein. So blieb die Frage offen, ob dieser ausgezeichnete Operator die gleichen guten Abbildungseigenschaften hat wie die durch Integralausdrücke gegebenen.

Erst im Jahr 1984 konnten Harvey und Polking in [HaP 84] im Spezialfall der Einheitskugel im $\mathbb{C}^n$ mit euklidischer Metrik einen expliziten Integralkern angeben, dessen zugeordneter Operator dem kanonischen Lösungsoperator entspricht. Parallel hierzu identifizierten Lieb und Range in [LiR 83] den Hauptteil eines Integralkerns für $\mathbf{K}$ in beliebigen streng pseudokonvexen Gebieten, deren Metrik gewissen Eigenschaften genügt. Eines ihrer Ergebnisse ist:

Satz. Es sei $D \subset\subset X$ ein streng pseudokonvexes Gebiet, das durch eine geeignete Randfunktion r gegeben ist. X sei eine hermitesche Mannigfaltigkeit mit einer normalisierten Levimetrik. Dann gibt es explizite Integraloperatoren

$$T_q : L^2_{0,q+1} \to L^2_{0,q} \qquad \text{für } q = 0, \dots, n-1,$$

so daß für jede $(0,q)$-Form $f \in L^2_{0,q} \cap \operatorname{dom} \bar\partial \cap \operatorname{dom} \bar\partial^*$ mit $q \geq 1$ gilt:

$$f = T_q \bar\partial f + T^*_{q+1} \bar\partial^* f + Z_2 \bar\partial f + Z_2 \bar\partial^* f + Z_1 f,$$

wobei die Ausdrücke Z_1 und Z_2 für gewisse generische Fehlerterme stehen, welche stärker regularisierend wirken als T_q und T^*_{q+1}.

Lieb und Range zeigten, daß sich aus dieser Darstellung asymptotische Entwicklungen für die kanonischen Lösungsoperatoren gewinnen lassen, mit deren Hilfe sich zahlreiche Regularitätsaussagen beweisen lassen. Durch weitere Untersuchungen konnten sie in [LiR 86_1] bzw. [LiR 93] auch einen Integralkern für den Hauptteil des Neumannoperators auf D mit zugehöriger asymptotischer Entwicklung gewinnen. Zahlreiche Autoren haben die von Lieb und Range gefundene Methode, Integralkerne zu gewinnen, später verwendet, um ihre Ergebnisse auf größere Klassen von Gebieten zu übertragen, etwa Michel für streng pseudokonkave [Mic 92] oder Ma für q-konvexe Gebiete [Ma 89].

Um die Konvergenz gewisser Integrale zu ermöglichen, erfordern die Methoden von Lieb und Range jedoch, daß D Teilmenge einer umgebenden Mannigfaltigkeit mit Levimetrik ist. In der Tat läßt sich für jedes gegebene streng pseudokonvexe Gebiet D mit glattem Rand eine solche Metrik konstruieren, und mit Hilfe eines Ergebnisses von Sweeney [Swe 76] folgt, daß viele der so gewonnenen Ergebnisse in Wirklichkeit unabhängig von der gewählten Metrik sind. Auf die Voraussetzung, daß die zugrundeliegende Metrik sich über den Rand des Gebietes fortsetzen läßt, kann man jedoch nicht ohne weiteres verzichten.

1.3 Randwerte und anisotrope Abschätzungen

Vom Standpunkt der Theorie partieller Differentialgleichungen untersuchen wir beim $\bar\partial$-Neumannproblem den elliptischen Operator $\Box$ mit nicht koerziven Randbedingungen.

Im zweiten Punkt unterscheidet sich dies vom reellen Laplaceoperator, und es ist daher von besonderem Interesse, das Randverhalten der beteiligten Operatoren zu untersuchen. Zahlreiche Autoren haben z. B. die Randwerte des Neumannoperators mit Hilfe von Integralformeln untersucht. Eine systematische Untersuchung zur Klärung des Begriffs *„Randwerte eines Integraloperators“* führte aber erst Hefer in [Hef 02] durch. Als zentrales Ergebnis hatte Cumenge in [Cum 90] mit Hilfe von Integralformeln zuvor den folgenden Satz bewiesen:

Satz. Es sei $D \subset\subset X$ streng pseudokonvex mit Randfunktion r. Es sei $0 \leq q \leq n-1$. Die Metrik von X sei eine normalisierte Levimetrik und es gelte

$$\begin{aligned} f &\in L^1_{0,q+1}(D) \cap \ker \bar\partial, \\ (-r)^{-\frac{1}{2}} \bar\partial r \wedge f &\in L^1_{0,q+2}(D) \cap \ker \bar\partial. \end{aligned}$$

Dann besitzt $\mathbf{K}f$, die kanonische Lösung der $\bar\partial$-Gleichung für f, Randwerte im Raum $L^1_{0,q}(bD)$, deren Norm beschränkt ist durch

$$||\mathbf{K}f||_{L^1_{0,q}(bD)} \leq C \left(||f||_{L^1_{0,q+1}(D)} + ||(-r)^{-\frac{1}{2}} \bar\partial r \wedge f||_{L^1_{0,q+2}(D)} \right). \tag{2}$$

Schuldenzucker konnte die Aussage später in [Sch 94] auf beliebige L^p-Räume mit $1 \leq p \leq \infty$ verallgemeinern.

Die Voraussetzungen, welche an f gestellt werden, stellen dabei im Grunde eine anisotrope Randbedingung dar: Der tangentiale Anteil von f, der in $\bar\partial r \wedge f$ verbleibt, muß einer stärkeren Bedingung genügen als der nicht-tangentiale Anteil, welcher durch das $\bar\partial r$-Differential annulliert wird. Indem wir eine neue Metrik $\langle .,. \rangle_\omega$ definieren, können wir Räume betrachten, die dieser Problemstellung besser angepaßt sind: Es sei

$$\langle f, g \rangle_\omega := \langle f, g \rangle + (-r)^{-1} \langle \bar\partial r \wedge f, \bar\partial r \wedge g \rangle,$$

wobei $\langle f, g \rangle$ die ursprüngliche, von X auf D induzierte, Metrik bezeichnet.

Eine Form f erfüllt genau dann die Voraussetzungen des zitierten Satzes, wenn sie im L^2-Raum bezüglich der Metrik $\langle .,. \rangle_\omega$ liegt, d. h.

$$||f||^2_\omega := \int_D \langle f, f \rangle_\omega dV < \infty$$

gilt, und die rechte Seite von (2) im Fall von L^2-Räumen entspricht gerade $||f||^2_\omega$. Der so gebildete Raum $L^2_\omega := \{f : ||f||^2_\omega < \infty\}$ unterscheidet sich schon insofern von den zuvor betrachteten L^2-Räumen mit Levimetrik, als selbst Formen, deren Koeffizienten glatt bis zum Rand des Gebiets sind, nur dann in L^2_ω liegen, wenn sie noch der zusätzlichen Randbedingung genügen, daß ihr tangentialer Anteil auf dem Rand des Gebiets verschwindet.

Wenn wir unseren Betrachtungen diese Metrik zugrunde legen, stellen wir fest, daß sich D nicht mehr als relative kompakte Teilmenge einer größeren hermiteschen Mannigfaltigkeit X schreiben läßt, denn $\langle .,. \rangle_\omega$ wird auf dem Rand von D singulär. Die von Lieb, Range und anderen gewonnenen Integralformeln lassen sich somit nicht ohne weiteres übertragen, und ihre Ergebnisse bleiben geometrischen Situationen wie dieser zunächst verschlossen.

Der prominenteste Verteter einer Metrik, für die wir aufgrund dieser Betrachtung keine Resultate erwarten können, ist die einem Gebiet in kanonischer Weise zugeordnete *Bergmanmetrik*, denn Diederich zeigt in [Die 70], daß diese die gleiche Anisotropie im Randverhalten zeigt wie $\langle .\,,. \rangle_\omega$.

Mit Hilfe der gewichteten Integralformeln vom Koppelmannschen Typ nach Berndtsson und Andersson [BeA 83] ist es jedoch sehr wohl möglich, Lösungsoperatoren für die $\bar{\partial}$-Gleichung und $\partial\bar{\partial}$-Gleichung in ähnlicher Situation zu gewinnen, wie Andersson und Carlsson es in [AnC 95] zeigen.

Ihre Methode basiert auf den von ihnen Anfang der 90er Jahre eingeführten L^2_α-Räumen:

Definition. Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein streng pseudokonvexes Gebiet mit Randfunktion r. Es sei $\langle .\,,. \rangle_\beta$ die Levimetrik auf D, die durch $\beta = i\partial\bar{\partial}r$ gegeben ist, und eine anisotrope Metrik $\langle .\,,. \rangle_\Omega$ sei gegeben durch $\Omega := i(-r)\partial\bar{\partial}\log(1/(-r))$, d. h.

$$\langle f, g \rangle_\Omega := (-r)\langle f, g \rangle_\beta + \langle \bar{\partial}r \wedge f, \bar{\partial}r \wedge g \rangle_\beta .$$

Für $\alpha > 0$ betrachten wir die Räume L^2_α der $(0,q)$-Formen mit endlicher $||.||_\alpha$-Norm, wobei

$$||f||^2_\alpha := c_{n,\alpha,q} \int_D (-r)^{\alpha-1} \langle f, f \rangle_\Omega dl$$

für gewisse Konstanten $c_{n,\alpha,q}$.

In diesen Räumen gaben Andersson, Boo und Ortega-Cerda in [ABO 98] im Jahr 1998 einen expliziten Integralkern für den kanonischen Lösungsoperator der $\bar{\partial}$-Gleichung in der Einheitskugel des $\mathbb{C}^n$ an. Mit gleichen Methoden läßt sich der Hauptteil dieses Operators in beliebigen streng pseudokonvexen Gebieten des $\mathbb{C}^n$ mit glattem Rand gewinnen [AnB 00],[Lam 00].

Zentraler Bestandteil ist dabei der folgende Dimensionsübergang:

Satz. Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein streng pseudokonvexes Gebiet mit Randfunktion $r(z)$. Man betrachte dann das ebenfalls streng pseudokonvexe Gebiet

$$\tilde{D} := \{(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : r(z) + |w|^2 < 0\} \quad \subset\subset \mathbb{C}^{n+1},$$

das also die Randfunktion $\tilde{r}(z, w) := r(z) + |w|^2$ besitzt. Auf D und $\tilde{D}$ bilden wir jeweils die Metriken und L^2_α-Räume aus obiger Definition. Für jede $(0,q)$-Form $f \in C^\infty(\overline{D})$ sei $\tilde{f}(z, w) := f(z)$ die bezüglich der neuen Koordinate konstante Fortsetzung nach $\tilde{D}$. Mit $\tilde{f}_t$ bezeichnen wir den *tangentialen Anteil* von $\tilde{f}$ auf $b\tilde{D}$, dem Rand des Gebiets $\tilde{D}$.

Dann ist der Übergang

$$f \mapsto \tilde{f}_t$$

bijektiv zwischen den glatten Formen in D und den glatten *invarianten* tangentialen Formen auf $b\tilde{D}$, wobei *„invariant“* bedeutet, daß die Form unter Rotationen in der w-Variablen konstant ist. Außerdem gilt

$$||f||_\alpha = ||\tilde{f}||_{\alpha-1} = ||\tilde{f}_t||_b,$$

wenn $||.||_b$ die von $\tilde{\beta}$ induzierte Norm auf $b\tilde{D}$ bezeichnet. Bei Verwendung dieser Metrik ist der Übergang $f \mapsto \tilde{f}_t$ also insbesondere auch eine Isometrie.[1]

Ein weiterer Satz stellt dann den Bezug zum $\bar{\partial}$-Neumannproblem her:

Satz. Es sei $\mathbf{K}_\alpha$ der kanonische Lösungsoperator der $\bar{\partial}$-Gleichung im Raum $L^2_\alpha(D)$ und $\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha-1}$ der kanonische Lösungsoperator der $\bar{\partial}$-Gleichung im Raum $L^2_{\alpha-1}(\tilde{D})$. Dann gilt für $f \in L^2_\alpha(D)$:

$$\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f} = \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha-1}\tilde{f}.$$

Durch Kombination dieser beiden für die geometrische Situation typischen Ergebnisse ist es dann möglich, den kanonischen Lösungsoperator $\mathbf{K}_\alpha$ auf D mit Hilfe der Randwerte des Operators $\mathbf{K}_{\alpha-1}$ auf $\tilde{D}$ darzustellen und schließlich seinen Hauptteil explizit zu berechnen.

[1]Die vollständigen Definitionen der hier verwendeten Begriffe werden in Abschnitt II gegeben.

2 Über diese Arbeit

Die vorliegende Arbeit verbindet die Methoden von Andersson über die L^2_α-Räume und die von Lieb zur Berechnung des Neumannoperators, wobei wir auch einige Ansätze für neue Anwendungen aufzeigen. Als Hauptergebnis erhalten wir, daß in der von uns beschriebenen Geometrie für ein streng pseudokonvexes Gebiet mit glattem Rand wesentlich einfacher explizite Integralkerne mit guten Eigenschaften zur Lösung des Neumannproblems und der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gefunden werden können, als dies etwa in der euklidischen Situation der Fall ist. Dies zeigt, daß die zugrundegelegte Metrik „natürlich“ für die Geometrie der betrachteten Gebiete ist. Es ist zu vermuten, daß auch andere Fragestellungen durch in dieser Arbeit vorgestellte Methoden einfacher behandelt werden können.

Im ersten Abschnitt präzisieren wir zunächst die Begriffe und Notationen, welche in Teil 1 der Einleitung vorgestellt wurden. Darauf aufbauend formulieren wir das Neumannproblem als die zentrale Fragestellung, die wir später untersuchen werden. Weil wir die von Lieb, Range und Michel bekannte Definition *zulässiger Kerne* um die Möglichkeit nichtganzzahliger Exponenten erweitern müssen, führen wir im Rahmen dieser Darstellung ihre Definition und wichtigsten Eigenschaften noch einmal auf. Zusätzlich beweisen wir einige Regularitätseigenschaften der zugehörigen Integraloperatoren, insbesondere charakterisieren wir ihr Verhalten unter Ableitung in tangentialer Richtung und gewinnen dabei eine bisher unbekannte Kommutatorrelation zwischen zulässigen Operatoren und tangentialen Vektorfeldern, welche später zentraler Bestandteil unserer Regularitätsergebnisse sein wird:

Theorem (Kapitel I, Theorem 87)**.** Es sei A_λ ein zulässiger Operator vom Typ $\lambda > 0$ und T ein tangentiales Vektorfeld. Dann gilt für $f \in C^1(\overline{D})$

$$TA_\lambda f = A_\lambda \tilde{T} f + \sum A^{(i)}_{\lambda+1} X^{(i)} f + \tilde{A}_\lambda f.$$

Dabei ist $\tilde{T}$ wiederum ein tangentiales Vektorfeld, $A^{(i)}_\lambda$ und $\tilde{A}_\lambda$ sind zulässige Operatoren und die $X^{(i)}$ glatte Vektorfelder, die jedoch nicht notwendig tangential sein müssen.

Mit Hilfe der Theorie zulässiger Operatoren ist es möglich, die Fehlerterme zu kontrollieren, welche bei der Untersuchung expliziter Darstellungen der Operatoren **N** und **K** und ihrer asymptotischen Entwicklung auftreten. Da dies unser Ziel im dritten Teil der Arbeit sein wird, geben wir zuvor eine Übersicht über die von Lieb und Michel hierzu entwickelte Methode.

Als letztes Grundlagenkapitel führen wir anschließend die benötigten Begriffe ein, um die zuvor gezeigte tangentiale Regularität zulässiger Operatoren praktisch anwenden zu können: Wir betrachten zunächst die Randwerte von Funktionen und Formen im allgemeinen und untersuchen dann basierend auf den Ergebnissen von Hefer [Hef 02] und Schuldenzucker [Sch 94] speziell den Zusammenhang zwischen Distributions- und Restriktionsrandwerten zulässiger Operatoren, d. h. die Frage, wann wir für die im Distributionensinn erklärten Randwerte eines zulässigen Operators einen Integralkern zur Verfügung haben, den wir aus den Einschränkungsrandwerten des zugehörigen zulässigen Kerns gewinnen können. Wir interessieren uns dabei insbesondere für Operatoren, deren Kern eine Potenz der Randfunktion als Faktor enthält. Für diese erhalten wir unter anderem:

Satz (Kapitel I, Korollar 109–111)**.** Es sei $\mathcal{A}$ ein zulässiger Kern vom Typ λ. Dann gilt für

- $\lambda > 2$: Der zu $\mathcal{A}$ gehörige Operator besitzt Randwerte.
- $\lambda = 2$: Der zu $\mathcal{A}$ gehörige Operator besitzt Randwerte, falls alle lokalen Darstellungen echt positive Potenzen der Randfunktion $(-\rho)$ enthalten.
- $\lambda \geq 1$: Der zu $\mathcal{A}' := (-\rho)^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}$ gehörige Operator besitzt Randwerte.
- $\lambda > 0$: Der zu $\mathcal{A}'' := (-\rho)\mathcal{A}$ gehörige Operator besitzt Randwerte.
- $\lambda = 0$: Der zu $\mathcal{A}'' := (-\rho)\mathcal{A}$ gehörige Operator besitzt Randwerte, falls in lokaler Darstellung die Potenzen der Randfunktion $\gamma = 0$ und $t - \delta > \frac{5}{2}$ oder $t - \delta < 2$ erfüllen.[2]

Diese Klasse von Operatoren ist für uns besonders interessant, da es sich bei ihnen um die natürliche Form handelt, in welcher Integralkerne in den gewichteten L^2-Räumen vorkommen, und auf die wir im Rahmen dieser Arbeit daher besonderes Gewicht legen werden: Wir folgen zunächst Andersson bei der Vorstellung der anisotropen L^2_α-Räume mit ihren wichtigsten Eigenschaften und den auf ihnen definierten Differentialoperatoren. Indem wir die zuvor eingeführten Begriffe zulässiger Operatoren an diese geometrische Situation anpassen und ihr Abbildungsverhalten zwischen den anisotropen Räumen mit Gewichtung beschreiben, erhalten wir eine neue Theorie von zulässigen (Fehler-)Termen, welche in vielen Aspekten dem ursprünglichen Kalkül in der von Lieb, Michel und anderen Autoren beschriebenen Situation mit Levimetrik entspricht.

Als Besonderheit der gewichteten Bergmanräume demonstrieren wir die Möglichkeit, den Dimensionsübergang $f \mapsto \tilde{f}_t$ zu verwenden, um einen Integraloperator T auf einem Gebiet D im $\mathbb{C}^n$ mit einem Operator tangentialer Randwerte $\tilde{T}^b$ in Verbindung zu setzen, der auf Formen in einem Gebiet $\tilde{D}$ im $\mathbb{C}^{n+1}$ wirkt. Dies ist auch deshalb interessant, weil wir zeigen können, daß auf diese Weise die Neumannoperatoren auf D bzw. auf $\tilde{D}$ für passende Gewichte ineinander überführt werden.

Zusätzlich zeigen wir, wie sich Regularitätsaussagen zwischen der n-dimensionalen und der $(n+1)$-dimensionalen Situation übertragen, und kombinieren dies mit unseren zuvor gewonnenen Resultaten über die Regularität tangentialer Randwerte zulässiger Operatoren. So erhalten wir u. a. auf einfache Weise die $C^\infty(\overline{D})$- und $C^k(\overline{D})$-Regularität für eine Klasse von Operatoren, welche wir als *transformiert zulässig* bezeichnen, und bei denen es sich um diejenigen Operatoren handelt, welche sich mit Hilfe des Dimensionsübergangs aus zulässigen Operatoren gewinnen lassen. Eines unserer späteren Ergebnisse wird sein, daß die Hauptteile von $\mathbf{K}_\alpha$ und $\mathbf{N}_\alpha$ durch transformiert zulässige Kerne beschrieben werden können.

[2]Die entsprechenden Notationen werden in Abschnitt I eingeführt.

Der letzte Teil der Arbeit kombiniert die zuvor gewonnenen neuen Methoden zur Behandlung des ursprünglich gestellten Problems: Wir verwenden die Methode des Dimensionsübergangs, um das Differentialgleichungssystem für die Integralkerne von $\mathbf{K}_\alpha$ und $\mathbf{N}_\alpha$ im Gebiet D auf ein wesentlich vereinfachtes System für die Randwerte der entsprechenden Kerne im zugehörigen Gebiet $\tilde{D}$ zu reduzieren. Wie sich herausstellt, läßt sich eine explizite Lösung des reduzierten Problems leicht angeben, und wir erhalten in einer Abwandlung bekannter Methoden eine asymptotische Entwicklung für $\mathbf{K}_\alpha$ und $\mathbf{N}_\alpha$, die nur auf den zuvor bestimmten tangential zulässigen Integralkernen beruht und sich sehr einfach aufstellen läßt. Aus Untersuchungen der Randwertkerne gewinnen wir so eine Reihe von Aussagen, für die sonst der vollständige Integralkern bekannt sein müßte, etwa:

Satz (Kapitel III, Satz 3)**.** Für $\alpha > 1$ und Formen vom Grad $1 \leq q \leq n-1$ bewahrt der Neumannoperator $\mathbf{N}_\alpha$ Glattheit:

$$\mathbf{N}_\alpha : C^\infty(\overline{D}) \to C^\infty(\overline{D}).$$

Im letzen Abschnitt führen wir schließlich vor, wie es möglich ist, die Transformation von der Dimension $(n+1)$ zur Dimension n explizit auszuführen und so vollständig explizite Formeln für die Hauptteile der Kerne von $\mathbf{K}_\alpha$ und $\mathbf{N}_\alpha$ zu erhalten. Eine Abschätzung deren Typs ermöglicht es uns, die L^2_α-Stetigkeit aller beteiligten Operatoren in der asymptotischen Entwicklung zu zeigen, und daraus erhalten wir weitere Aussagen über die Wirkung von $\mathbf{N}_\alpha$ in Funktionenräumen mit anderem Gewicht als in L^2_α, etwa

Satz (Kapitel III, Satz 28)**.** Für $\alpha > 1$ und Formen vom Grad $1 \leq q \leq n-1$ bildet der Neumannoperator $\mathbf{N}_\alpha$ stetig ab:

$$\mathbf{N}_\alpha : L^2_\vartheta(D) \to L^2_\kappa(D), \qquad \text{für } \kappa > 1,\ 1 < \vartheta \leq \alpha \text{ und } \vartheta - \kappa < 2.$$

Analoge Ergebnisse erhält man auch für den kanonischen Lösungsoperator $\mathbf{K}_\alpha$. Diese Art von Regularitätsergebnissen waren bisher nur für isotrope und nicht-singuläre Metriken bekannt. Die Arbeit endet mit einer Zusammenfassung und Diskussion der erzielten Ergebnisse.

Mein Dank gilt Herrn Professor Dr. Ingo Lieb für die interessante Themenstellung und die Betreuung meiner Promotion in Bonn sowie Herrn Professor Dr. Mats Andersson für die Betreuung während meines Aufenthalts in Göteborg. Bei Dr. Torsten Hefer bedanke ich mich für interessante und hilfreiche fachliche Diskussionen, außerdem bei Antje Schwuchow für das Korrekturlesen und bei Corinna Herrmann für das Binden der Arbeit.

Weiterhin bin ich meinen Eltern zu Dank verpflichtet, die mich während der gesamten Zeit meines Studiums und meiner Promotion unterstützt haben. Während meines Auslandsaufenthalts und der anschließenden Zeit in Bonn wurde ich vom *Deutschen Akademischen Auslandsdienst*, der *Studienstiftung des Deutschen Volkes* und der *Bonn International Graduate School* finanziell gefördert, auch dafür danke ich.

Zuletzt und am meisten danke ich meiner Freundin Jasmin, die immer für mich da war.

Teil I

Das Neumannproblem und zulässige Operatoren

1 Der Neumannoperator

1.1 Grundlagen

Es sei M eine *komplexe Mannigfaltigkeit* der Dimension $n \geq 2$. Auf M betrachten wir für $0 \leq p, q, \leq n$ die Räume $\Lambda^{p,q}(M)$ der (p,q)-Differentialformen und als Teilräume $C^\infty_{p,q}(M)$ die (p,q)-*Formen mit glatten Koeffizienten*. Wenn der Grad der Formen keine Rolle spielt, unterdrücken wir den Index und schreiben die direkte Summe der $C^\infty_{p,q}(M)$ als $C^\infty(M)$. Wenn die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit aus dem Zusammenhang klar ist, kürzen wir dies auch mit C^∞ ab. Für $\Lambda^{p,q}(M)$ und andere Räume von Formen verwenden wir jeweils die gleiche Konvention.

Auf M sei eine C^∞-glatte *hermitesche Metrik* ds^2 gegeben, also ein Skalarprodukt auf dem komplexifizierten Tangentialraum an M. ds^2 induziert ein *punktales Skalarprodukt* auf den Differentialformen in jedem Punkt, das wir mit $\langle . , . \rangle(x)$ für $x \in M$ bezeichnen, oder kurz $\langle . , . \rangle$. Als komplexe Mannigfaltigkeit besitzt M zudem eine durch die komplexe Struktur ausgezeichnete Orientierung und das zugehörige *Volumenelement* von M nennen wir $dV(x)$ bzw. dV.

Satz 1. *Für jedes $0 \leq p, q \leq n$ existiert ein eindeutiger Operator Hodge-$*$-Operator*

$$* : \Lambda^{p,q}(M) \longrightarrow \Lambda^{n-q,n-p}(M),$$

der punktweise der definierenden Gleichung

$$f \wedge *\bar{g} := \langle f\, , g \rangle dV$$

für alle (p,q)-Formen $f, g \in \Lambda^{p,q}(M)$ genügt. Bekanntermaßen gilt $*1 = dV$ und $*dV = 1$.

Definition 2. Durch Integration über M erhalten wir das übliche L^2-*Skalarprodukt* für Differentialformen f, g auf M:

$$(f, g) := \int_M f \wedge *\bar{g} = \int_M \langle f, g \rangle dV,$$

sofern das Integral existiert. Entsprechend definieren wir die zugehörige L^2-*Norm* durch $\|f\|_{L^2} := (f, f)^{\frac{1}{2}}$ und den Raum der quadratintegrablen (p,q)-Formen durch

$$L^2_{p,q}(M) := \{f \in \Lambda^{p,q}(M) : \|f\|_{L^2} < \infty\}.$$

Der Raum $L^2_{p,q}(M)$ wird mit dem Skalarprodukt $(. , .)$ zu einem Hilbertraum. Die glatten Formen mit beschränkter L^2-Norm liegen dicht in ihm.

Definition 3. Analog definieren wir mit Hilfe von $|f| := \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ die L^p-*Normen* für $1 \leq p \leq \infty$ von Formen in M:

$$\|f\|_{L^p} := \left[\int_M |f|^p dV \right]^{\frac{1}{p}} \qquad \text{für } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_M |f|$$

und die zugehörigen L^p-*Räume* durch

$$L^p(M) := \{f : \|f\|_{L^p} < \infty\} \qquad \text{für } 1 \leq p \leq \infty.$$

Für alle p liegt die Menge der glatten Formen mit beschränkter L^p-Norm wiederum dicht in L^p.

1.2 Partielle Differentialoperatoren auf L^2

Auf dem Unterraum $C^1(M) \cap L^p(M) \subset L^p(M)$ stetig differenzierbarer Formen ist der Cauchy-Riemann-Operator $\bar{\partial}$ als partieller Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten definiert. Wir setzen $\bar{\partial}$ im Distributionensinn zu einem *maximalen abgeschlossenen Operator auf* $L^p(M)$ fort, den wir wiederum mit $\bar{\partial}$ bezeichen:

Definition 4. Es sei

$$\operatorname{dom} \bar{\partial} := \{f \in L^p : \bar{\partial} f \in L^p\} \qquad \subset L^p(M),$$

wobei $\bar{\partial} f$ im Distributionensinn zu bilden ist. Dann ist

$$\bar{\partial} : \operatorname{dom} \bar{\partial} \subset L^p \to L^p$$

ein (unbeschränkter) dicht definierter Differentialoperator erster Ordnung auf L^p.

Für unterschiedliche Werte von p unterscheiden sich dabei die Definitionsgebiete $\operatorname{dom} \bar{\partial}$. Wir werden im folgenden stets den $\bar{\partial}$-Operator bezüglich L^2 verwenden, da uns dort Hilbertraum-Methoden zur Verfügung stehen.

Definition 5. Da die glatten Formen mit kompaktem Träger, $\mathcal{D}(M) := C_c^\infty(M)$, insbesondere in $\operatorname{dom} \bar{\partial} \subset L^2$ liegen, können wir im Hilbertraum L^2 durch

$$(\vartheta f, g) := (f, \bar{\partial} g) \qquad \text{für alle } f, g \in \mathcal{D}(M) \tag{6}$$

den *formal adjungierten Operator* ϑ zu $\bar{\partial}$ bilden.

Mittels partieller Integration können wir ϑ ebenfalls als Differentialoperator erster Ordnung bestimmen und seine Wirkung im Distributionssinn auf ganz $L^2(M)$ betrachten. Wenn wir ϑ als solchen auf beliebige Formen in $L^2(M)$ anwenden, entstehen jedoch im Bild Formen mit Distributionskoeffizienten, so daß wir den Definitionsbereich des adjungierten Operators auf sinnvolle Weise einschränken möchten, damit auch sein Bild in $L^2(M)$ enthalten ist. Weiterhin möchten wir, daß Gleichung (6) auch für beliebige $g \in \operatorname{dom} \bar{\partial}$ erfüllt ist, was nicht automatisch der Fall ist, selbst wenn $f \in L^2(M)$ und $\vartheta f \in L^2(M)$ ist. Dazu setzen wir:

Definition 7. Es sei der *Hilbertraum-adjungierte Operator* $\bar{\partial}^*$ zu $\bar{\partial}$ in L^2 gegeben durch

$$\bar{\partial}^* f := \vartheta f \quad \text{(im Distributionensinn) für } f \in \operatorname{dom} \bar{\partial}^*$$

auf dem Definitionsgebiet

$$\operatorname{dom} \bar\partial^* := \{f \in L^2(M) : \vartheta f \in L^2(M) \;\text{ und }\; \forall g \in \operatorname{dom} \bar\partial \;\; (\bar\partial g, f) = (g, \vartheta f)\}.$$

Es ist bekannt, daß auf diese Weise wieder ein dicht definierter Operator in L^2 entsteht, jedoch kann $\operatorname{dom} \bar\partial^*$ deutlich kleiner als z. B. $\operatorname{dom} \bar\partial$ sein.

Durch die Definitionen 4 und 7 erhalten wir einen Doppelkomplex dicht definierter Operatoren

$$\dots \underset{\bar\partial^*}{\overset{\bar\partial}{\rightleftarrows}} L^2_{p,q-1}(M) \underset{\bar\partial^*}{\overset{\bar\partial}{\rightleftarrows}} L^2_{p,q}(M) \underset{\bar\partial^*}{\overset{\bar\partial}{\rightleftarrows}} L^2_{p,q+1}(M) \underset{\bar\partial^*}{\overset{\bar\partial}{\rightleftarrows}} \dots,$$

denn es ist sowohl $\bar\partial \circ \bar\partial = 0$ als auch $\bar\partial^* \circ \bar\partial^* = 0$. So liegt es nahe, das komplexe Analogon zum reellen Laplaceoperator zu bilden:

Definition 8. Der *Laplace-Beltrami-Operator* $\Box$ ist gegeben durch

$$\Box := (\bar\partial + \bar\partial^*)^2 = \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial.$$

Sein Definitionsbereich ist entsprechend

$$\operatorname{dom} \Box := \{f \in \operatorname{dom} \bar\partial \cap \operatorname{dom} \bar\partial^* : \bar\partial f \in \operatorname{dom} \bar\partial^* \text{ und } \bar\partial^* f \in \operatorname{dom} \bar\partial\} \subset L^2(M).$$

Satz 9. *Für jedes $0 \le p, q \le n$ ist der dicht definierte Operator*

$$\Box : \operatorname{dom} \Box \subset L^2_{p,q} \to L^2_{p,q}$$

selbstadjungiert. Weil

$$(\Box f, g) = (f, \Box g) \qquad \textit{für alle } f, g \in \operatorname{dom} \Box,$$

gilt, stehen $\operatorname{im} \Box$ *und* $\ker \Box$ *bezüglich* $(.\,,.)$ *orthogonal zueinander, was wir im folgenden mit dem Symbol* $\perp$ *abkürzen. Weiterhin gilt*

$$(\Box f, f) \ge 0 \qquad \textit{für alle } f \in \operatorname{dom} \Box,$$

und Gleichheit herrscht genau für $f \in \ker \Box$.

Definition 10. Wie im Reellen bezeichnen wir die Differentialformen im Kern des Laplace-Betrami-Operators als *harmonische Formen*, und wir fassen sie in den Räumen $\mathcal{H}_{p,q}$ zusammen:

$$\mathcal{H}_{p,q} := \{f \in \operatorname{dom} \bar\partial \cap \operatorname{dom} \bar\partial^* \subset L^2_{p,q} \mid \bar\partial f = 0 \text{ und } \bar\partial^* f = 0\}.$$

$\mathcal{H}_{p,q}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $L^2_{p,q}$ und wir definieren den Operator $\mathbf{H}_{p,q}$ als die *orthogonale Projektion* der Formen in $L^2_{p,q}$ auf ihren harmonischen Anteil, also

$$\mathbf{H}_{p,q} : L^2_{p,q} \to \mathcal{H}_{p,q}.$$

Es gilt nun die *schwache orthogonale Zerlegung*

$$L^2_{p,q} = \overline{\operatorname{im}\Box} \oplus \mathcal{H}_{p,q}, \tag{11}$$

bzw., da $\operatorname{im}\bar\partial \perp \operatorname{im}\bar\partial^*$ ist:

$$L^2_{p,q} = \overline{\operatorname{im}\bar\partial} \oplus \overline{\operatorname{im}\bar\partial^*} \oplus \mathcal{H}_{p,q}. \tag{12}$$

Auf dem orthogonale Komplement $\mathcal{H}^\perp_{p,q}$ von $\mathcal{H}_{p,q}$ können wir versuchen, den Laplace-Beltrami-Operator zu invertieren:

Definition 13 (Neumannbedingung)**.** Es sei $f \perp \mathcal{H}_{p,q}$. Dann sagen wir, daß für f die *Neumannbedingung* erfüllt ist, wenn f im Bild von $\Box$ liegt, wenn es also eine Form $g \in \operatorname{dom}\Box$ gibt, so daß

$$\Box g = f. \tag{14}$$

Falls es für f überhaupt eine solche Lösung g gibt, so ist $g' := g - \mathbf{H}_{p,q}g$ ebenfalls eine Lösung, und g' liegt im Raum $\mathcal{H}^\perp_{p,q}$. Wie man leicht sieht, ist g' die einzige Lösung zu Gleichung (14) mit dieser Eigenschaft (und hängt als solche nur von f ab, jedoch nicht von g).

Definition 15. Wir führen die Bezeichnung ein:

$$\textit{Es gilt } N(p,q) \quad :\Leftrightarrow \quad \operatorname{im}\Box \textit{ ist abgeschlossen in } L^2_{p,q}.$$

Wegen Gleichung (11) bedeutet $N(p,q)$ also, daß $\mathcal{H}^\perp_{p,q} = \operatorname{im}\Box$ und damit, daß die $\bar\partial$-Neumannbedingung für alle Formen $f \in \mathcal{H}^\perp_{p,q}$ erfüllt ist.

Definition 16 (Neumannoperator)**.** Es gelte $N(p,q)$, dann erhalten wir aus den vorherigen Betrachtungen einen Operator $\mathbf{N}_{p,q}$ auf $\mathcal{H}^\perp_{p,q}$

$$\mathbf{N}_{p,q}f := g \qquad \text{für } f \in \mathcal{H}^\perp_{p,q}, \text{ wenn } \Box g = f \text{ und } g \perp \mathcal{H}_{p,q},$$

den wir trivial zu einem Operator auf ganz $L^2_{p,q}$ fortsetzen können durch

$$\mathbf{N}_{p,q}f := 0 \qquad \text{für } f \in \mathcal{H}_{p,q}.$$

Wir nennen $\mathbf{N}_{p,q}$ den *Neumannoperator*; er hängt nur von M und ds^2 ab. Wenn der Grad der Differentialformen nicht von Bedeutung ist, schreiben wir statt $\mathbf{N}_{p,q}$ auch einfach $\mathbf{N}$.

Satz 17. *Es gelte $N(p,q)$, so daß der Operator $\mathbf{N}_{p,q}$ definiert ist. Dann sind $\mathbf{N}_{p,q}$ und $\mathbf{H}_{p,q}$ beschränkt und selbstadjungiert, und es gilt die starke orthogonale Zerlegung*

$$\begin{aligned} L^2_{p,q} &= \operatorname{im}\Box \oplus \mathcal{H}_{p,q} \\ &= \operatorname{im}\bar\partial \oplus \operatorname{im}\bar\partial^* \oplus \mathcal{H}_{p,q}. \end{aligned}$$

Außerdem läßt sich leicht zeigen:

Satz 18. *Es gelte $N(p,q)$. Dann ist für jedes $f \in L^2_{p,q}$*

$$\begin{aligned} f &= \Box \mathbf{N} f + \mathbf{H} f, \\ f &= \mathbf{N} \Box f + \mathbf{H} f \qquad \textit{für alle } f \in \operatorname{dom} \Box, \\ \mathbf{N}\mathbf{H} f &= \mathbf{H}\mathbf{N} f = 0. \end{aligned}$$

Wenn außer $N(p,q)$ auch $N(p,q+1)$ erfüllt ist, gilt außerdem

$$\begin{aligned} \bar\partial \mathbf{N}_{p,q} f &= \mathbf{N}_{p,q+1} \bar\partial f, \qquad \textit{für alle } f \in \operatorname{dom} \bar\partial \subset L^2_{p,q}, \\ \bar\partial^* \mathbf{N}_{p,q+1} f &= \mathbf{N}_{p,q} \bar\partial^* f, \qquad \textit{für alle } f \in \operatorname{dom} \bar\partial^* \subset L^2_{p,q+1}. \end{aligned}$$

1.3 Konsequenzen aus der Existenz von $\mathbf{N}_{p,q}$

Durch das Wissen, daß der Neumannoperator für Formen eines gewissen Grades existiert, gewinnt man weitere Erkenntnisse über die Mannigfaltigkeit M. Zunächst erhalten wir, daß der Raum der harmonischen Formen isomorph zur L^2-Kohomologie bezüglich $\bar\partial$ ist:

Satz 19. *Es gelte $N(p,q)$ dann ist*

$$\mathcal{H}^{p,q} \cong H^{p,q}_{L^2} := \frac{\ker\{\bar\partial : L^2_{p,q} \to L^2_{p,q+1}\}}{\operatorname{im}\{\bar\partial : L^2_{p,q-1} \to L^2_{p,q}\}}$$

Beweis. Dies folgt aus der starken orthogonale Zerlegung von L^2. Da $\operatorname{im} \bar\partial^* \perp \ker \bar\partial$, besitzt jede Form in $\ker \bar\partial$ eine eindeutige orthogonale Zerlegung in einen Anteil in $\operatorname{im} \bar\partial$ und einen Anteil in $\mathcal{H}^{p,q}$.

Bemerkung. Falls M ein streng pseudokonvexes Gebiet in einer hermiteschen Mannigfaltigkeit ist, gilt außerdem, daß $\mathcal{H}^{p,q}$ für $q \geq 1$ von endlicher Dimension ist und ebenfalls isomorph zu den Kohomologiegruppen

$$\begin{aligned} H^{p,q}_{C^\infty(M)} &:= \frac{\ker\{\bar\partial : C^\infty_{p,q}(M) \cap L^2_{p,q}(M) \to C^\infty_{p,q+1}(M) \cap L^2_{p,q+1}(M)\}}{\operatorname{im}\{\bar\partial : C^\infty_{p,q-1}(M) \cap L^2_{p,q-1}(M) \to C^\infty_{p,q}(M) \cap L^2_{p,q}(M)\}}, \\ H^{p,q}_{C^\infty(\overline{M})} &:= \frac{\ker\{\bar\partial : C^\infty_{p,q}(\overline{M}) \to C^\infty_{p,q+1}(\overline{M})\}}{\operatorname{im}\{\bar\partial : C^\infty_{p,q-1}(\overline{M}) \to C^\infty_{p,q}(\overline{M})\}}. \end{aligned}$$

Wir benötigen diese Aussage jedoch für unsere Betrachtungen nicht.

Ebenso ergibt sich die Lösbarkeit der $\bar\partial$-Gleichung (außerhalb der Kohomologie):

Lemma 20. *Es sei $q \geq 1$ und für $f \in \mathcal{H}^\perp_{p,q}$ mit $\bar\partial f = 0$ sei die Neumannbedingung erfüllt. Dann sind die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen*

$$\bar\partial u = f \tag{21}$$

lösbar und $u := \bar\partial^* \mathbf{N}_{p,q} f$ ist die eindeutige Lösung, welche orthogonal zu $\ker \bar\partial$ steht.

Beweis. Der Beweis ist typisch für viele elementare Argumente in der L^2-Theorie: Weil $f \perp \mathcal{H}_{p,q}$ ist, gilt

$$(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial)\mathbf{N}f = f,$$

und indem wir auf beide Seiten der Gleichung $\bar\partial$ anwenden, ergibt sich $\bar\partial\bar\partial^*\bar\partial\mathbf{N}f = 0$. Wir bilden das Skalarprodukt mit $\bar\partial\mathbf{N}f$ und erhalten so

$$0 = (\bar\partial\bar\partial^*\bar\partial\mathbf{N}f, \bar\partial\mathbf{N}f) = ||\bar\partial^*\bar\partial\mathbf{N}f||^2,$$

also gilt bereits $\bar\partial^*\bar\partial\mathbf{N}f = 0$ und somit

$$\bar\partial\,\bar\partial^*\mathbf{N}f = f.$$

Damit ist $u := \bar\partial^*\mathbf{N}f$ eine Lösung zu (21). Offensichtlich gilt für $g \in \ker\bar\partial$

$$(\bar\partial^*\mathbf{N}f, g) = (\mathbf{N}f, \bar\partial g) = 0,$$

also ist die Lösung u tatsächlich orthogonal zu $\ker\bar\partial$. u ist eindeutig, wenn falls $v \in (\ker\bar\partial)^\perp$ ebenfalls eine Lösung zu Gleichung (21) ist, dann gilt $u - v \in (\ker\bar\partial)^\perp$ und $\bar\partial(u-v) = \bar\partial u - \bar\partial v = f - f = 0$, also $u - v \in (\ker\bar\partial)^\perp \cap \ker\bar\partial$ und damit $u = v$.

Indem wir diese Konstruktion für alle geeigneten f durchführen, erhalten wir

Definition 22. Es sei $q \geq 1$, und es gelte $N(p,q)$. Dann setzen wir

$$\mathbf{K}_{p,q}f := \begin{cases} \bar\partial^*\mathbf{N}_{p,q}f & \text{für } f \in \mathcal{H}_{p,q}^\perp \cap \ker\bar\partial, \\ 0 & \text{für } f \perp \mathcal{H}_{p,q}^\perp \cap \ker\bar\partial \end{cases}$$

und nennen $\mathbf{K}_{p,q}$ den *kanonischen Lösungsoperator für den $\bar\partial$-Operator* (bzw. *für die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen*) in $L^2_{p,q}$.

Lemma 23. *Es sei $\mathbf{K}_{p,q}$ definiert für $L^2_{p,q}$, dann gilt*

$$\mathbf{K}_{p,q} : L^2_{p,q}(M) \to (\ker\bar\partial)^\perp,$$

und für jedes $f \in \operatorname{im}\bar\partial$ ist durch $\mathbf{K}_{p,q}f$ die eindeutig bestimmte Lösung zu (21) *mit minimaler L^2-Norm gegeben.*

Beweis. Daß das Bild von $\mathbf{K}_{p,q}$ im orthogonalen Komplement von $\ker\bar\partial$ liegt, ist klar nach Definition 22 und der vorherigen Betrachtung von $\bar\partial^*\mathbf{N}_{p,q}$. Es sei nun also $f \in \operatorname{im}\bar\partial$, also $f = \bar\partial g$ für ein $g \in \operatorname{dom}\bar\partial$. Dann ist zunächst $f \perp \ker\bar\partial^*$, also insbesondere $f \perp \mathcal{H}_{p,q}$, und damit ist $\mathbf{K}_{p,q}f$ eine mögliche Lösung zu Gleichung (21). Jede weitere Lösung $g \in \operatorname{dom}\bar\partial$ mit $f = \bar\partial g$ können wir schreiben als $g = \mathbf{K}_{p,q}f + h$ mit $h \in \ker\bar\partial$, und diese Zerlegung ist orthogonal wegen $\mathbf{K}_{p,q}f \perp \ker\bar\partial$. Dadurch wissen wir

$$||g||^2 = ||\mathbf{K}_{p,q}f||^2 + ||h||^2 \geq ||\mathbf{K}_{p,q}f||^2,$$

was die Minimalitätseigenschaft beweist, und $\mathbf{K}_{p,q}f$ ist eindeutig mit dieser Eigenschaft, da nur für $h \equiv 0$ (im L^2-Sinn) Gleichheit zwischen beiden Seiten herrscht.

Definition 24. Es sei $\mathbf{K}^*_{p,q}$ der *adjungierte Operator* zu $\mathbf{K}_{p,q}$, d. h. es gelte für $q \geq 1$

$$(\mathbf{K}^* f, g) := (f, \mathbf{K} g) \qquad \text{für alle } f \in L^2_{p,q-1},\ g \in L^2_{p,q}.$$

Satz 25. *Wenn außer $N(p,q)$ auch $N(p,q-1)$ gilt, können wir $\mathbf{K}^*$ analog zu $\mathbf{K}$ mit Hilfe des Neumannoperators ausdrücken. Es gilt dann*

$$\mathbf{K}^*_{p,q} f = \bar\partial \mathbf{N}_{p,q-1} f \qquad \textit{für alle } f \in L^2_{p,q-1}.$$

$\mathbf{K}^*_{p,q}$ ist der kanonische Lösungsoperator für die Gleichung

$$\bar\partial^* u = f$$

auf $(p,q-1)$ Formen, d. h. es gilt

$$\mathbf{K}^*_{p,q} : L^2_{p,q-1} \to (\ker \bar\partial^*)^\perp$$

und

$$\bar\partial^* \mathbf{K}^*_{p,q} f := \begin{cases} f & \textit{für } f \in \mathcal{H}^\perp_{p,q} \cap \ker \bar\partial^*, \\ 0 & \textit{für } f \perp \mathcal{H}^\perp_{p,q} \cap \ker \bar\partial^*. \end{cases}$$

Beweis. Die erste Aussage ist offensichtlich, denn für alle $f \in L^2_{p,q-1}$, $g \in \ker \bar\partial^* \subset L^2_{p,q}$ ist

$$(\mathbf{K}^*_{p,q} f, g) = (f, \mathbf{K}_{p,q} g) = 0$$

nach Definition 22, weil $\ker \bar\partial^* \perp \mathcal{H}^\perp_{p,q} \cap \ker \bar\partial$. Außerdem gilt für alle $f \in L^2_{p,q-1}$

$$(\mathbf{K}^*_{p,q} f, g) = (f, \mathbf{K}_{p,q} g) = (f, \bar\partial^* \mathbf{N}_{p,q} g) = (f, \mathbf{N}_{p,q-1} \bar\partial^* g) = (\mathbf{N}_{p,q} f, \bar\partial^* g) = (\bar\partial \mathbf{N}_{p,q} f, g),$$

sofern $g \in \operatorname{dom} \bar\partial^* \subset L^2_{p,q}$, was die zweite Behauptung zeigt, da $\operatorname{dom} \bar\partial^*$ dicht in $L^2_{p,q}$ liegt.

Aus der Lösungseigenschaft von $\mathbf{N}$ erhalten wir die *Homotopierelation* für $\mathbf{K}$.

Korollar 26. *Es gelte $N(p,q)$ und $N(p,q+1)$, dann gilt für jedes $f \in L^2_{p,q}$*

$$\bar\partial \mathbf{K}_{p,q} f + \bar\partial^* \mathbf{K}^*_{p,q+1} f = f - \mathbf{H}_{p,q} f.$$

Beweis. Dies ist eine direkte Konsequenz von Satz 18, da

$$\bar\partial \mathbf{K}_{p,q} f + \bar\partial^* \mathbf{K}^*_{p,q+1} f = \bar\partial \bar\partial^* \mathbf{N}_{p,q} f + \bar\partial^* \bar\partial \mathbf{N}_{p,q} f = \Box \mathbf{N}_{p,q} f = f - \mathbf{H}_{p,q} f.$$

Für $p = q = 0$ erhalten wir außerdem eine Aussage über die Bergmanprojektion:

Definition 27. Es sei $A(M) := L^2_{0,0}(M) \cap \mathcal{O}(M)$ der *Bergmanraum*. Dann bezeichnen wir die orthogonale Projektion

$$\mathbf{P} : L^2_{0,0}(M) \to A(M)$$

bezüglich $(.,.)$ als die *Bergmanprojektion*.

Lemma 28. *Wenn $N(0,0)$ gilt, erhalten wir*

$$\mathbf{P}f = f - \bar{\partial}^* \bar{\partial} \mathbf{N}_{0,0} f.$$

Doch selbst wenn über $N(0,0)$ nichts bekannt ist, aber $N(0,1)$ gilt, können wir $\mathbf{P}$ mit Hilfe von $\mathbf{N}$ darstellen als

$$\mathbf{P}f = f - \bar{\partial}^* \mathbf{N}_{0,1} \bar{\partial} f.$$

Beweis. Offensichtlich gilt $\mathbf{P} = \mathbf{H}_{0,0}$, denn für alle $(0,0)$-Formen f ist $\bar{\partial}^* f = 0$, also $H_{0,0} = A$. Die erste Gleichung folgt somit direkt aus Satz 18. Um die zweite Aussage zu beweisen, bezeichnen wir für den Moment den Operator, dessen Wirkung durch die rechte Seite der Gleichung gegeben ist, mit B. Eine Funktion $f \in \operatorname{dom} \bar{\partial}$ zerlegen wir nun orthogonal $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 \in A(M)$ und $f_2 \perp A(M)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} Bf &= f - \bar{\partial}^* \mathbf{N}_{0,1} \bar{\partial} f \\ &= f - \bar{\partial}^* \mathbf{N}_{0,1} \bar{\partial} f_2, \end{aligned}$$

denn $\bar{\partial} f = \bar{\partial} f_2$. Wir wissen, daß $\bar{\partial}^* \mathbf{N}_{0,1}$ die $\bar{\partial}$-Gleichung löst und $\bar{\partial}^* \mathbf{N}_{0,1} \bar{\partial} f_2$ die eindeutige Lösung zu $\bar{\partial} u = \bar{\partial} f_2$ im Raum $(\ker \bar{\partial})^\perp$ sein muß. Da f_2 selbst ebenfalls in diesem Raum liegt, gilt $\bar{\partial}^* \mathbf{N}_{0,1} \bar{\partial} f_2 = f_2$, also

$$\begin{aligned} &= f - f_2 \\ &= f_1, \end{aligned}$$

was zu zeigen war, denn nach Definition von $\mathbf{P}$ ist $\mathbf{P}f = f_1$.

Korollar 29. *Da $\bar{\partial}^* \mathbf{N}_{0,1} = \mathbf{K}_{0,1}$ gilt, ist klar, daß wir $\mathbf{P}$ auch mit Hilfe von $\mathbf{K}_{0,1}$ schreiben können als*

$$\mathbf{P}f = f - \mathbf{K}_{0,1} \bar{\partial} f \qquad \textit{für } f \in \operatorname{dom} \bar{\partial}.$$

Zuletzt stellen wir fest, daß wir auch den Neumannoperator selbst mit Hilfe des kanonischen Lösungsoperators zu $\bar{\partial}$ und dessen Adjungierten ausdrücken können:

Satz 30. *Es gelte $N(p,q)$ und $N(p,q+1)$, dann gilt in Analogie zur Definition von $\square$:*

$$\mathbf{N}_{p,q} = \mathbf{K}_{p,q+1} \mathbf{K}^*_{p,q+1} + \mathbf{K}^*_{p,q} \mathbf{K}_{p,q}.$$

Beweis. Aufgrund der zuvor gezeigten Beziehungen gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^*_{p,q+1} &= \bar{\partial} \mathbf{N}_{p,q} && \text{auf } L^2_{p,q}, \\ \mathbf{K}_{p,q+1} &= \mathbf{N}_{p,q} \bar{\partial}^* && \text{auf } \operatorname{dom} \bar{\partial}^* \subset L^2_{p,q+1}, \\ \mathbf{K}^*_{p,q} &= \mathbf{N}_{p,q} \bar{\partial} && \text{auf } \operatorname{dom} \bar{\partial} \subset L^2_{p,q-1}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für jedes $f \in L^2_{p,q}$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{p,q+1} \mathbf{K}^*_{p,q+1} f + \mathbf{K}^*_{p,q} \mathbf{K}_{p,q} f &= \mathbf{N}_{p,q} \bar{\partial}^* \bar{\partial} \mathbf{N}_{p,q} f + \mathbf{N}_{p,q} \bar{\partial} \bar{\partial}^* \mathbf{N}_{p,q} f \\ &= \mathbf{N}_{p,q} \square \mathbf{N}_{p,q} f \\ &= \mathbf{N}_{p,q} f, \end{aligned}$$

denn $\mathbf{N}_{p,q} f \perp \mathcal{H}_{p,q}$, so daß wir anwenden können, daß $\mathbf{N}_{p,q}$ invers zu $\square$ ist.

1.4 Integralformeln

Neben dem Ansatz, die Abgeschlossenheit des Bildes von $\Box$ und damit die Existenz des Neumannoperators mit L^2-Methoden zu beweisen, ist es auch möglich, Integralformelmethoden zu benutzen, um das Neumannproblem – und andere Probleme – zu untersuchen. Das ist der Weg, den wir in dieser Arbeit gehen wollen.

Weil unser Ziel mehr auf einer verständlichen Vorstellung der Methode des Dimensionsübergangs aus Kapitel II liegt, als auf seiner Darstellung in größtmöglicher Allgemeinheit, werden wir nur in streng pseudokonvexen Gebieten im $\mathbb{C}^n$ mit glattem Rand arbeiten. In denen die Lösbarkeit der $\bar{\partial}$-Gleichung prinziell bekannt ist.

Die gleichen Betrachtungen könnten auch auf komplexen Mannigfaltigkeiten für Formen mit Koeffizienten in Vektorbündeln angestellt werden. Dies stellt jedoch keine wesentliche Verallgemeinerung dar, da wir vom umgebenden $\mathbb{C}^n$ ohnehin nicht die Metrik, sondern im Grunde nur der Einfachheit halber die globalen Koordinaten ζ und z übernehmen werden.

Definition 31. Es sei ρ eine C^∞-glatte Funktion auf einer offenen Menge U

$$\rho : U \to \mathbb{R}.$$

Dann definieren wir die *Leviform* $L_\rho(z;t)$ von ρ im Punkt z durch

$$L_\rho(z;t) := \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z)\ t_j \bar{t}_k \qquad \text{für } t \in \mathbb{C}^n.$$

Wir nennen ρ *streng plurisubharmonisch*, wenn $L_\rho(z;.)$ in jedem Punkt $z \in U$ eine streng positiv definite hermitesche Form auf dem $\mathbb{C}^n$ ist.

Definition 32. Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Dann heißt D *streng pseudokonvex*, wenn es eine streng plurisubharmonische Funktion r in einer Umgebung $U(\overline{D})$ von $\overline{D}$ gibt, so daß $d\rho \neq 0$ auf bD und D gegeben ist als

$$D = \{z \in U(\overline{D}) : \rho(z) < 0\}.$$

Unser generelles Ziel nun:

Bestimme auf $D \times D$ einen Integralkern $\mathcal{N}(\zeta, z)$ für den Neumannoperator N, d. h. für alle $f \in L^2(D)$ und $z \in D$ soll gelten

$$\mathbf{N}f(z) = \int_D f(\zeta) \wedge *\overline{\mathcal{N}(\zeta, z)}.$$

Falls dies nicht durchführbar sein sollte, bestimme zumindest einen Kern $\mathcal{N}'(\zeta, z)$, der eine möglichst gute Approximation (in einem näher zu bezeichnenden Sinn) von $\mathcal{N}(\zeta, z)$ darstellt, d. h.

$$\mathbf{N}f(z) = \int_D f(\zeta) \wedge *\overline{\mathcal{N}'(\zeta, z)}\ +\ Ff(z)$$

für einen möglichst leicht zu kontrollierenden und möglichst expliziten Fehlerterm F.

2 Zulässige und isotrope Kerne

Unser wichtigstes Hilfsmittel zum Gewinn von Integraloperatoren zur Behandlung des $\bar{\partial}$-Neumannproblems ist die Theorie der *zulässigen Kerne*, die wir in diesem Kapitel beschreiben und an unsere Bedürfnisse anpassen wollen. Wir werden nur kleine Teile der sehr viel umfassenderen Beschreibung in [LiM 02] benötigen, die dortigen Begriffe jedoch leicht erweitern, um bereits jetzt die Grundlage unserer späteren Betrachtungen über gewichtete Bergmanräume zu legen. Dort werden wir insbesondere zulässige Kerne mit nicht-ganzzahligen Exponenten benötigen, so daß wir diese auch in diesen Abschnitt aufnehmen.

2.1 Streng pseudokonvexe Gebiete

Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein streng pseudokonvexes Gebiet mit glatten Rand, für das wir eine streng plurisubharmonische Randfunktion $\rho = \rho(\zeta)$ fixiert haben, also $D := \{\zeta \subset \mathbb{C}^n : \rho(\zeta) < 0\}$, wobei ρ in einer Umgebung des Gebiets C^∞ glatt ist und $d\rho \neq 0$ auf bD gilt.

Da ρ streng plurisubharmonisch ist, können wir eine kanonische Metrik auf D bilden:

Definition 33. Es sei die hermitesche Metrik ds^2_ρ auf D gegeben durch

$$ds^2_\rho(\zeta) := \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta_j \partial \bar{\zeta}_k}(\zeta) \quad d\zeta_j \otimes d\bar{\zeta}_k.$$

Bemerkung. Die zugehörige definierende $(1,1)$-Form ist $\beta := i\partial\bar{\partial}\rho$ und damit ist ds^2_ρ automatisch eine Kählermetrik. In der Terminologie von Lieb/Michel handelt es sich bei β um die *Levimetrik* von ρ. Ihr Verhalten und das des zugehörigen Neumannoperators wird ausführlich in [LiM 02] beschrieben.

Weil sich die einer Metrik zugeordnete $(1,1)$-Form einfacher handhaben läßt, verwenden wir im folgenden stets diese Schreibweise statt eines Ausdrucks ds^2. Statt von der Metrik ds^2_ρ sprechen wir daher von der Metrik, die durch β gegeben ist, oder einfach von der Metrik β.

Im Produktgebiet $D \times D$ verwenden wir die Koordinaten (ζ, z) und schreiben $\eta = \zeta - z$ und $\eta_i = \zeta_i - z_i$. Wenn wir die Randfunktion als Funktion der Variable z statt ζ betrachten, nennen wir sie r statt ρ, d. h. $r = r(z) := \rho(z)$. Ableitungen der Randfunktion notieren wir in Index-Schreibweise, also

$$r_i = \frac{\partial r}{\partial z_i} \qquad \text{und} \qquad \rho_{\bar{\imath}} = \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_i}, \qquad \text{etc.}$$

Definition 34. Wir definieren auf die übliche Weise das *Levipolynom* von ρ

$$F(\zeta, z) := -\sum_{i=1}^n \rho_i \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} \eta_i \eta_j.$$

F ist holomorph in z und bekanntermaßen folgt aus der strengen Pseudokonvexität von D, daß bei festem $z \in bD$ und lokal betrachtet $\zeta = z$ die einzige Nullstelle von $F(\zeta, z)$ in $\overline{D}$ ist. Für ein streng konvexes Gebiet wäre dies auch global der Fall, doch da D nur streng pseudokonvex ist, kann $F(\,.\,, z)$ noch weitere Nullstellen in $\overline{D}$ besitzen. Wir wählen daher eine glatte Abschneidefunktion $\varphi(\zeta, z)$ mit kompaktem Träger, die identisch 1 ist in einer kleinen Umgebung der Diagonale $\Delta := \{\zeta = z : (\zeta, z) \in \overline{D} \times \overline{D}\}$. Wir nehmen dabei an, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $\varphi \equiv 1$, wenn $R^2(\zeta, z) < \frac{\varepsilon}{3}$ und $\varphi \equiv 0$, wenn $R^2(\zeta, z) > \frac{2\varepsilon}{3}$, wobei

$$R^2(\zeta, z) := \sum_{i,j=1}^{n} \rho_{i\bar{j}} \eta_i \bar{\eta}_j$$

eine Approximation des geodätischen Abstands zwischen z und ζ bezüglich der Metrik β ist [Rha 60].

Wiederum auf $\overline{D} \times \overline{D}$ setzen wir

$$v(\zeta, z) := (-\rho + F)\varphi + (1 - \varphi)R^2.$$

Die so entstehende Funktion heißt *erweitertes Levipolynom.* $v(\zeta, z)$ hat keine Nullstellen außerhalb der Randdiagonalen $\Lambda = \{\zeta = z : (\zeta, z) \in bD \times bD\}$. Allerdings ist v im Gegensatz zu F nicht überall holomorph bzgl. z, sondern nur in einer Umgebung von Δ, wo es mit $-\rho + F$ übereinstimmt. Zur Abkürzung setzen wir außerdem

$$v^*(\zeta, z) := \overline{v(z, \zeta)}$$

Beispiel. Am einfachsten nachzuvollziehen sind diese Konstruktionen am Beispiel der Einheitskugel $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}^n$, die durch die Randfunktion

$$\rho(\zeta) = |\zeta|^2 - 1$$

gegeben ist. Für sie gilt

$$\beta = i\partial\bar{\partial}\rho = i d\zeta \cdot d\bar{\zeta},$$

wobei wir als Schreibweise mit dem Malpunkt für Faktoren z oder ζ bzw. deren Differentiale ein $\mathbb{C}$-lineares Skalarprodukt mittels $\wedge$ abkürzen, also $d\zeta \cdot d\bar{\zeta} := \sum_i d\zeta^i \wedge d\bar{\zeta}^i$. Analog ist $\bar{z} \cdot d\zeta = \sum_i \bar{z}^i d\zeta^i$, etc.

Die Metrik β ist bis auf eine Konstante also einfach die euklidische Metrik, und wegen $\rho_{i\bar{j}} = \delta_{ij}$ und $\rho_{ij} = 0$ ist

$$\begin{aligned} F &= \bar{\zeta} \cdot (\zeta - z) \\ R^2 &= |\zeta - z|^2. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum allgemeinen Fall ist $\mathbb{B}$ sogar echt konvex, und es ist daher nicht notwendig, bei der Definition von v mit R^2 zu verkleben (bzw. wir können ε in der Definition beliebig groß machen). Somit besitzt

$$\begin{aligned} v &= -\rho + F \\ &= 1 - \bar{\zeta} \cdot z \end{aligned}$$

bereits alle Eigenschaften, die wir später für das erweiterte Levipolynom formulieren und nachweisen werden.

Definition 35. Als Modifikation des Abstandsquadrats $R^2(\zeta, z)$ führen wir die *erweiterte Normfunktion*

$$\mathrm{P}(\zeta, z) := R^2(\zeta, z) + 2\rho(\zeta)r(z)$$

ein. P hat im Gegensatz zu R^2 keine Nullstellen im Innern des Produktgebiets, sondern nur auf der Randdiagonalen, und steht damit in einer ähnlichen Beziehung zu R^2, wie v zu F.

Definition 36. Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $E_m(\zeta, z)$ eine Produktform mit Koeffizienten in $C^\infty(\overline{D} \times \overline{D})$, die der Abschätzung

$$|E_m|_\beta \leq cR^m(\zeta, z)$$

für eine Konstante $c > 0$ genügt. Dann nennen wir E_m *isotrop*, bzw. *isotroper Kern, von der Ordnung* m. Für negative m verwenden wir den gleichen Begriff, falls es einen isotropen Kern $E_{m'}$ der Ordnung $m' \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$E_m = \frac{E_{m'}}{R^{m'-m}}.$$

Zur besseren Vergleichbarkeit mit zulässigen Kernen, werden wir im allgemeinen isotrope Kerne von negativer Ordnung über ihren *Typ* charaktisieren statt über ihre Ordnung:

Definition 37. Es sei E isotroper Kern von der Ordnung m, dann nennen wir E auch isotrop *vom Typ* $m + 2n$.

Der Hintergrund für diese Verschiebung ist, daß dadurch genau die isotropen Kerne vom Typ > 0 noch gleichmäßig in beiden Variablen über D integrierbar sind. Kerne vom Typ > 0 werden in unseren späteren Betrachtungen die wichtigste Rolle spielen.

2.2 Grundlegende Abschätzungen

Zwischen den eingeführten Funktionen bestehen einige Ungleichungen, die wir später für die Abschätzung der Integralkerne benötigen. Als allgemeine Konvention verwenden wir:

Definition 38. Es seien $f(x), g(x)$ Funktionen, die von einer beliebigen Anzahl Parameter x abhängen. Dann schreiben wir

$$f \lesssim g,$$

wenn es eine von x unabhängige Konstante $C > 0$ gibt, so daß $f \leq Cg$. Analog definieren wir $f \gtrsim g$ als $g \lesssim f$, und wir schreiben $f \sim g$, wenn $f \lesssim g$ und $f \gtrsim g$ gilt. Falls S und T Operatoren sind, die auf ein Argument f wirken, soll die Schreibweise $Sf \lesssim Tf$ auch beinhalten, daß die in der Abschätzung auftretende Konstante nicht von f abhängt.

Lemma 39. *Zwischen den Funtionen v, ρ, r, R^2 und* P *gelten in einer Umgebung der Diagonale Δ die Ungleichungen*

$$\begin{aligned}
|v| &\sim |\bar{v}| \sim |v^*| \sim |\bar{v}^*| \\
|v| &\gtrsim (-\rho) + |\operatorname{Im} v| + R^2 + (-r) \\
\mathrm{P} &\gtrsim R^2 + (-r)^2.
\end{aligned}$$

Beweis. Die Beweise sind elementarer Art und finden sich in [LiM 02], wobei wir die dortigen Ergebnisse deshalb verwenden können, da R^2 bezüglich β gebildet wird, welches wie erwähnt eine Levimetrik ist.

2.3 Zulässige Kerne

Aus diesen Funktionen definieren wir nun einen für diese Arbeit zentralen Begriff:

Definition 40. Es sei $\mathcal{A}(\zeta, z)$ eine Produktform auf $\overline{D} \times \overline{D}$. Dann nennen wir $\mathcal{A}(\zeta, z)$ einen *zulässigen Kern*, wenn

- $\mathcal{A}(\zeta, z) \in C^\infty(D \times D) \cap C^0(\overline{D} \times \overline{D} \setminus \Lambda)$ ist, wobei Λ die Randdiagonale bezeichnet,
- es zu jedem Punkt $(\zeta_0, z) \in bD \times \overline{D}$ oder $(\zeta, z_0) \in \overline{D} \times bD$ eine offene Umgebung U gibt mit einer *lokalen Darstellung* von $\mathcal{A}$ auf $U \cap \overline{D} \times \overline{D}$ als

  $$\mathcal{A}(\zeta, z) = (-\rho)^\delta (-r)^\gamma \mathrm{P}^{-t_0} v^{t_1} \bar{v}^{t_2} v^{*t_3} \bar{v}^{*t_4} E_m. \tag{41}$$

  Alle Exponenten seien reelle Zahlen, wobei $\delta, \gamma \geq 0$ und $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \leq 0$ gilt. E_m sei isotrop von der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Im allgemeinen setzen wir $t := -(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)$.

Bis auf die nicht-ganzzahligen Exponenten findet sich diese Definition unter anderem als III 5.49 in [LiM 02]. Ebenso wie dort graduieren wir die Kerne nach ihrem *Typ*:

Definition 42. Es sei $\mathcal{A}(\zeta, z)$ zulässig mit Darstellungen wie in Definition 40. Dann ist der Typ λ einer solchen Darstellung definiert als

$$\lambda := 2n + m + \min(2, t - \delta - \gamma) - 2(t_0 + t - \delta - \gamma),$$

und wir nennen $\mathcal{A}(\zeta, z)$ *vom Typ* λ, wenn $\mathcal{A}$ in allen Punkten lokale Darstellungen vom Typ λ besitzt. Generisch schreiben wir kurz $\mathcal{A}_\lambda$, um zu symbolisieren, daß ein Kern $\mathcal{A}$ Typ λ hat.

Bemerkung. Der Typ eines Kernes drückt im Prinzip eine Wachstumsbedingung in der Nähe der Singularitäten (soweit vorhanden) aus. Kerne vom gleichen Typ teilen viele Regularitätseigenschaften. Insbesondere sind alle Kerne vom Typ > 0 noch in beiden Variablen gleichmäßig über $\overline{D}$ integrierbar. Wir werden das später für Abschätzungen zulässiger Operatoren in L^p-Normen verwenden.

2.4 Beispiele

Viele klassische Kerne lassen sich als zulässige oder isotrope Kerne darstellen:

- Der *Bochner-Martinelli-Koppelman-Kern*:

$$B_{n,q} = c_{n,q} \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{\beta} \wedge (\bar{\partial}_\zeta \tilde{\beta})^{n-q-1} \wedge (\bar{\partial}_z \tilde{\beta})^q}{|\zeta - z|^{2n}}$$

  mit $\tilde{\beta} = \sum_j (\zeta_j - z_j) d\zeta_j$. Er ist isotrop von der Ordnung $1 - 2n$, d. h. vom Typ 1, wenn wir die euklidische Metrik zugrunde legen. Da $\tilde{\beta}$ und damit der Zähler isotrop von Ordnung 1 sind und für die euklidische Metrik $R^2 = |\zeta - z|^2$ gilt, ist die lokale Darstellung des Bochner-Martinelli-Koppelman-Kerns überall

$$B_{n,q}(\zeta, z) = \frac{E_1}{R^{2n}}.$$

- Der *Bergmankern* $\mathcal{B}$, d. h. der Integralkern der *Bergmanprojektion*

$$\mathbf{P} : L^2(\mathbb{B}) \to \mathcal{O}(\mathbb{B}).$$

  Für die Kugel $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}^n$ ist er global als zulässiger Kern vom Typ 0 gegeben

$$\mathcal{B}(\zeta, z) = \frac{n!}{\pi} \frac{1}{(1 - \bar{\zeta} \cdot z)^{n+1}}$$

  (wie gesehen gilt $v(\zeta, z) = 1 - \bar{\zeta} \cdot z$ für $\mathbb{B}$). Für alle $f \in L^2(\mathbb{B})$ gilt dann

$$\mathbf{P} f(z) = \int_D f(\zeta) \overline{\mathcal{B}(\zeta, z)} dl(\zeta).$$

- Der *Poissonkern* $\mathcal{P}$ und der *(Poisson-)Szegö-Kern* $\mathcal{S}$ für die Einheitskugel $\mathbb{B}$. Die zugehörigen Kerne sind zulässig vom Typ 2 und für die Kugel gegeben als

$$\mathcal{P}(\zeta, z) = C \frac{1}{(1 - \bar{\zeta} \cdot z)^n}$$

  bzw.

$$\mathcal{S}(\zeta, z) = C' \frac{(1 - |\zeta|^2)^n}{\left|1 - \bar{\zeta} \cdot z\right|^{2n}}.$$

  für gewisse Konstanten C, C'. Allerdings sind die zugehörigen *Poisson-* und *(Poisson-)Szegö-Operatoren* über Randintegrale definiert, wohingegen wir zulässige Operatoren über ein Volumenintegral erklären wollen, wie es beim Bergmankern der Fall war.

2.5 Zulässige und isotrope Operatoren

Wir ordnen jedem zulässigen oder isotropen Kern auf die folgende Weise einen Operator zu:

Definition 43. Auf D sei eine Metrik mit zugehörigem punktweisen Skalarprodukt $\langle .\,,. \rangle$ für Differentialformen gegeben. Es sei $\mathcal{A}(\zeta, z)$ eine Produktform auf $\overline{D} \times \overline{D}$. Dann definieren wir den zu $\mathcal{A}(\zeta, z)$ zugehörigen Operator A für alle f im Definitionsbereich und für alle $z \in \overline{D}$ durch

$$Af(z) := \int\limits_D \left\langle f(\zeta), \overline{\mathcal{A}(\zeta, z)} \right\rangle \, dV(\zeta),$$

wobei dV das zum Skalarprodukt gehörige Volumenelement ist, bzw. in anderer Schreibweise

$$Af(z) = \int\limits_D f(\zeta) \wedge *_\zeta \overline{\mathcal{A}(\zeta, z)},$$

wobei $*_\zeta$ der Hodge-$*$-Operator der Metrik bezüglich der ζ-Variable ist. Die Integration bezieht sich dabei ebenfalls nur auf die Differentiale bezüglich ζ, und wir verwenden die Konvention, daß zunächst alle $d\bar{z}$-Differentiale an das Ende des Ausdrucks zu sortieren sind, bevor die Produktform über ζ integriert wird.

Im allgemeinen ist die Definitionsmenge solcher Operatoren gerade die Menge aller Formen in einem Raum, für die das entsprechende Integral existiert. Die Operatoren, die wir betrachten, werden im allgemeinen auf L^p-Räumen oder Teilräumen von diesen (z. B. $C^\infty(\overline{D})$) erklärt sein.

Die Bezeichnungen für Kerne übertragen sich auf offensichtliche Weise auf die zuhörigen Operatoren:

Definition 44. Ein Operator A heißt *zulässig* bzw. *isotrop*, wenn er durch einen zulässigen bzw. isotropen Kern $\mathcal{A}$ gegeben werden kann. Ebenso heißt A vom Typ λ, wenn er einen Kern vom Typ λ besitzt.

3 Regularitätseigenschaften zulässiger Operatoren

3.1 Abschätzungen für isotrope Kerne und Operatoren

Aufgrund Ihrer einfachen Kernstruktur können wir für zulässige Kerne gute Abschätzungen finden und mittels dieser ihr Abbildungsverhalten studieren. Wir folgen dabei in Teilen der wesentlich umfasserenden Übersicht in [LiM 02]. Die wichtigste Grundlage ist

Lemma 45 (Youngsches Lemma)**.** *Es seien (X, μ) und (Y, ν) Maßräume und $\mathcal{K}(x, y)$ eine $\mu \times \nu$-meßbare Funktion auf $X \times Y$ mit*

- $\displaystyle\int\limits_X |\mathcal{K}(x, y)|^\sigma \, d\mu(x) \leq M^\sigma$ *für ν-fast alle x,*
- $\displaystyle\int\limits_Y |\mathcal{K}(x, y)|^\sigma \, d\nu(y) \leq M^\sigma$ *für μ-fast alle y,*

wobei $M \geq 0$ und $\sigma \geq 1$ reelle Konstanten sind. Dann ist der zugehörige Operator

$$Kf := \int\limits_X f(x)\mathcal{K}(x, y) d\mu(x)$$

für alle $1 \leq p \leq \infty$ ein beschränkter Operator zwischen $L^p(X)$ und $L^r(Y)$ mit Operatornorm höchstens M, wobei r gegeben ist durch

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\sigma} - 1.$$

Beweis. Der Satz besteht aus mehreren Anwendungen der Hölderungleichung. Er findet sich z. B. in Anhang B von [Ran 86].

Bemerkung. Da wir stets Operatoren betrachten, die auf Formen wirken, sind die von uns betrachteten Integralkerne im allgemeinen keine Funktionen, sondern selbst Produktformen. Da jedoch für jeden Integralkern $\mathcal{K}(\zeta, z)$ gilt, daß

$$\left| \int\limits_D \langle f, \overline{\mathcal{K}} \rangle dV \right| \leq \int\limits_D |f||\mathcal{K}| dV,$$

genügt es immer, die Voraussetzungen des Youngschen Lemma für den Betrag des Kernes zu überprüfen, um die Abbildungseigenschaft für den auf Formen wirkenden Operator zu folgern. Wir sprechen daher im folgenden auch davon, daß *ein Kern den Voraussetzungen des Youngschen Lemma genügt*, wenn die Norm des Kerns die entsprechenden Abschätzungen erfüllt.

Definition 46. Einen Kern, der für $\sigma = 1$ den Voraussetzungen des Youngschen Lemmas genügt, nennen wir *gleichmäßig integrierbar*, was ausdrücken soll, daß der Wert des Integrals bezüglich einer Variablen jeweils in der anderen Variablen gleichmäßig beschränkt ist.

Satz 47. *Es sei E_m ein isotroper Operator von Ordnung m und Typ $\lambda = 2n + m > 0$. Dann erfüllt sein Kern die Voraussetzung des Youngschen Lemmas für $1 \leq \sigma < \frac{2n}{2n-\lambda}$, falls $0 < \lambda < 2n$, bzw. für beliebiges $\sigma \geq 1$ sonst. Es ist also*

$$E_m : L^p(D) \to L^r(D)$$

ein stetiger Operator für $1 \leq p, r \leq \infty$ mit

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{\lambda}{2n},$$

wobei $\frac{1}{\infty}$ als 0 zu lesen ist.

Beweis. Es sei $E_m(\zeta, z)$ der isotrope Kern von E_m. Dann gilt für festes $z \in D$, daß

$$\begin{aligned}\int\limits_D |E_m|^\sigma dV(\zeta) &= \int\limits_D \left| \frac{\mathcal{E}_{m'}}{R^{m'-m}} \right|^\sigma dV(\zeta) \\ &\lesssim \int\limits_D \frac{1}{|\zeta - z|^{-m\sigma}} dV(\zeta)\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $-m\sigma < (2n - \lambda)\frac{2n}{2n-\lambda} = 2n$, also existiert das Integral und ist unabhängig von z durch eine Konstante beschränkt. Daß die zweite Voraussetzung erfüllt ist, ergibt sich aus der ersten wegen der Symmetrie zwischen ζ und z in isotropen Kernen, weil wir dem Urbild- und dem Bildraum die gleiche Metrik zugrundelegen.

3.2 Abschätzungen für zulässige Kerne

Bevor wir das analoge Ergebnis zu 47 für zulässige Kerne beweisen, betrachten wir noch einen Spezialfall, der die Besonderheit bei der Abschätzung anisotroper Kerne demonstriert.

Satz 48. *Es sei für $z \in D$*

$$I(z) := \int\limits_D \frac{1}{|v|^{n+1+t}} dl(\zeta).$$

Dann gilt für das Randverhalten von $I(z)$

$$I(z) \leq \begin{cases} C\frac{1}{(-r)^t} & \text{für } t > 0, \\ C\log(-r) & \text{für } t = 0, \\ C & \text{für } t < 0,^3 \end{cases}$$

wobei die Konstante C nicht von z abhängt. „Randverhalten“ soll dabei heißen, daß für jeden Randpunkt z_0 eine Umgebung $U(z_0)$ existiert, in welcher $I(z)$ durch die rechte Seite nach oben abgeschätzt werden kann.

[3] Wenn wir $\frac{1}{|v|^{n+1+t}}$ als zulässigen Kern auffassen, entspricht die Unterscheidung $t > 0$, $t = 0$ und $t < 0$ gerade dem Fall eines Kerns vom Typ $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ oder $\lambda > 0$.

Das analoge Ergebnis mit ζ und z in vertauschten Rollen, wobei die Integration über z durchgeführt wird, gilt ebenfalls.

Beweis. Zum Beweis verwenden wir ein speziell angepaßtes reelles Koordinatensystem $(x_1, \ldots, x_{2n})$ in $U \cap \overline{D}$:

Definition 49. Wir wählen

$$\begin{aligned} x_1(\zeta) &: = -\rho(\zeta) \\ x_2(\zeta) &: = \operatorname{Im} v(\zeta, z) \end{aligned}$$

und füllen dann orthogonal mit weiteren Koordinatenfunktionen $\tilde{x} = (x_3, \ldots, x_{2n})$ auf, die so gewählt seien, daß im zu Beginn fest gewählten Punkt z für $k = 3, \ldots, 2n$ gilt

$$x_k(z) = 0.$$

Wegen $\{x_1 = 0\} = U \cap bD$ können wir außerdem voraussetzen, daß für jedes $z \in U \cap D$ durch $(x_2(\zeta), \tilde{x}(\zeta))$ ein Randkoordinatensystem um den zu z nächstliegenden Randpunkt z' gegeben ist. Für genügend kleines U können wir außerdem fordern, daß für alle $\zeta \in U$

$$\|x(\zeta)\| \leq 1$$

gilt.

Bemerkung. Wir werden ein solches Koordinatensystem $(x_1, \ldots, x_{2n})$ in Zukunft als *zulässige Koordinaten in* $U(z_0)$ bezeichnen. Dies ist wohldefiniert, weil

$$dx_1 \wedge dx_2 = -\frac{1}{2i} d\rho \wedge d(v - \bar{v}) = -\frac{i}{2} \partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho + \mathcal{E}_1,$$

gilt, die Koordinatenfunktionen also linear unabhängig sind. Außerdem gilt

$$x(z) := (-r(z), 0, \ldots, 0),$$

denn $v(z, z) = -\rho(z)$ ist insbesondere reellwertig.

Bisweilen drücken wir $\tilde{x}$ in Polarkoordinaten aus, dann verwenden wir als einheitliche Notation

$$s^2 := \|\tilde{x}\|^2 = \sum_{j=3}^{2n} x_j^2.$$

Beweis (Fortsetzung Satz 48)**.** Es sei ein geeignet kleines U gewählt. Dann zerlegen wir das Integrationsgebiet unabhängig von z in $D \cap U$ und $D \setminus U$. Dabei ist der Integrand auf $\overline{D \setminus U}$ stetig und das Integral somit durch eine Konstante beschränkt.

Wir können voraussetzen, daß $D \cap U$ bezüglich zulässiger Koordinaten im „Zylinder" $\tilde{U} := (0, 1) \times (-1, 1) \times B_1^{(2n-2)}(0)$ enthalten ist, wobei $B_1^{(2n-2)}(0) = \{\tilde{x} : \|x\| < 1\}$. Aus Lemma 39 erhalten wir in neuen Koordinaten

$$|v| \gtrsim x_1 + |x_2| + (-r) + \|\tilde{x}\|^2.$$

Es gilt nun

$$
\begin{aligned}
I(z) &\leq \int\limits_{\tilde{U}} \frac{1}{[x_1 + |x_2| + (-r) + \|\tilde{x}\|^2]^{n+1+t}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2n} \\
&\lesssim \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{s^{2n-3}}{[(-r) + x_1 + x_2 + s^2]^{n+1+t}}\, dx_1\, dx_2\, ds.
\end{aligned}
$$

Falls $2n-3 \geq 2(n+1+t)$ gilt, so können wir den Integranden gegen einen singularitätenfreien Ausdruck kürzen. Das Integral ist dann also beschränkt. Andernfalls integrieren wir zunächst nach x_1 und x_2, die in erster Potenz auftreten, wobei wir die entstehenden negativen Randterme stets nach oben durch 0 abschätzen und daher weglassen können.

$$
\lesssim \int\limits_0^1 \frac{s^{2n-3}}{[(-r) + s^2]^{n-1+t}} ds.
$$

Falls $n-1+t=0$, erhalten wir stattdessen einen logarithmischen Ausdruck. Für diesen ist die Beschränktheit wegen des Zähler s^{2n-3} und $2n-3 \geq 1$ leicht einzusehen. Ansonsten schätzen wir ab

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \int\limits_0^1 \frac{1}{[(-r) + s^2]^{\frac{1}{2}+t}} ds \\
&\lesssim \int\limits_0^1 \frac{1}{[\sqrt{-r} + s]^{1+2t}} ds.
\end{aligned}
$$

Für $t = 0$ ist $\log(\sqrt{-r} + s)$ eine Stammfunktion und daraus folgt die behauptete Abschätzung. Für $t \neq 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-1}{2t} \left[(s + \sqrt{-r})^{-2t} \right]_0^1 \\
&= \frac{-1}{2t} \left[(1 + \sqrt{-r})^{-2t} - (-r)^{-t} \right] \\
&\lesssim \begin{cases} C & \text{für } t < 0, \\ (-r)^{-t} & \text{für } t > 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Um das Ergebnis bei Integration über z zu zeigen, verwenden wir, daß in der Nähe der Diagonalen $|v(z,\zeta)| \sim |v(\zeta,z)|$ gilt und benutzen die gleiche Methode wie zuvor.

Das wesentliche Ergebnis über zulässige Kerne ist nun:

Satz 50. *Es sei A_λ ein zulässiger Operator vom Typ $2n+2 > \lambda > 0$. Dann ist für $1 \le \sigma < \frac{2n+2}{2n+2-\lambda}$*

$$\int_D |\mathcal{A}(\zeta, z)|^\sigma dl(\zeta) < M \tag{$*_\zeta$}$$

und

$$\int_D |\mathcal{A}(\zeta, z)|^\sigma dl(z) \; < M. \tag{$*_z$}$$

Für $\lambda \ge 2n+2$ gilt die Aussage für jedes $\sigma \ge 1$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $(*_\zeta)$, dazu sei $z \in D$ fest gewählt. Als zulässiger Kern ist $\mathcal{A}(., z)$ stetig bis zum Rand, das Integral existiert also auf jeden Fall. Wir müssen somit nur zeigen, daß es in z gleichmäßig durch eine Konstante beschränkt ist. Dabei müssen wir wiederum nur das Verhalten betrachten, wenn z sich dem Rand nähert, denn für z innerhalb jeder relativ kompakten Teilmenge von D ist $\mathcal{A}(., z)$ gleichmäßig beschränkt.

Wir betrachten also einen beliebigen Randpunkt $z_0 \in bD$ und eine Umgebung $U = U(z_0) \cap D$. Dann zeigen wir:

$$\int_U |\mathcal{A}(\zeta, z)|^\sigma \; dl(\zeta) \le M \qquad \text{gleichmäßig für } z \text{ in } U.$$

Die Umgebung U sei klein genug gewählt, daß wir die übliche lokale Darstellung von $\mathcal{A}(\zeta, z)$ zur Verfügung haben, wir also

$$|\mathcal{A}(\zeta, z)| = \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta |E_m|}{|v|^t \mathrm{P}^{t_0}} \tag{51}$$

für $(\zeta, z) \in \overline{U} \times \overline{U}$ schreiben können.

Um die Zahl der Spezialfälle zu reduzieren, vereinfachen wir die Struktur des Kerns zunächst durch die folgende allgemeine Feststellung:

Lemma 52. *Es sei $\mathcal{A}$ zulässig vom Typ λ. Dann ist $|\mathcal{A}|$ auf $U \times U$ (bis auf eine multiplikative Konstante) gleichmäßig nach oben beschränkt durch einen zulässigen Kern $\mathcal{B}$ vom gleichen Typ, welcher die Form*

$$|\mathcal{B}| = \frac{|E_m|}{|v|^{t'} \mathrm{P}^{t'_0}} \tag{I}$$

mit $0 \le t' \le 2$ oder

$$|\mathcal{B}| = |E_m|(-\rho)^{\delta'}(-r)^{\gamma'} \tag{II}$$

hat.

Beweis. Nach Lemma 39 können wir in $U \times U$ abschätzen

$$(-\rho) \lesssim |v| \quad \text{und} \quad (-\rho) \lesssim \mathrm{P}^{\frac{1}{2}}.$$

Ebenso gilt

$$(-r) \lesssim |v| \quad \text{und} \quad (-r) \lesssim \mathrm{P}^{\frac{1}{2}}$$

sowie

$$|v| \gtrsim \mathrm{P}^{\frac{1}{2}}.$$

Mit diesen Relationen „kürzen“ wir nun im Ausdruck $|\mathcal{A}|$ zunächst Potenzen der Randfunktion mit Potenzen von $|v|$, soweit dies möglich ist. Für den Spezialfall, daß $\gamma + \delta \geq t$, verbleiben Potenzen von $(-r)$ bzw. $(-\rho)$ und wir schätzen diese soweit es geht gegen Potenzen von P ab. Sollte sogar $\gamma + \delta \geq t + 2t_0$ gegolten haben, verbleibt ein Kern der Form (II). Ansonsten erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}(\zeta, z)| &= \frac{(-r)^{\gamma}(-\rho)^{\delta}|E_m|}{|v|^t \mathrm{P}^{t_0}} \\
&\lesssim \frac{(-r)^{\gamma'}(-\rho)^{\delta'}|E_m|}{\mathrm{P}^{t_0}}, \qquad \text{wobei } \gamma' + \delta' = \gamma + \delta - t, \\
&\lesssim \frac{|E_m|}{\mathrm{P}^{t_0 - \frac{\gamma+\delta-t}{2}}}.
\end{aligned}$$

Dieser Kern hat die gewünschte Form (I) mit $t' = 0$ und $t_0' = t_0 + \frac{t-\gamma-\delta}{2}$. Sein Typ ist folglich

$$\mu = 2n - 2t_0' + m = 2n - 2t_0 - (t - \gamma - \delta) + m,$$

was gerade dem Typ λ von $\mathcal{A}$ entspricht, da $t < \gamma + \delta$ insbesondere $t - \gamma - \delta < 2$ impliziert.

Der wesentlich häufigere Fall ist, daß $\gamma + \delta < t$. Dann kürzen wir zunächst alle Potenzen von $(-r)$ und $(-\rho)$ mit $|v|$:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}(\zeta, z)| &= \frac{(-r)^{\gamma}(-\rho)^{\delta}|E_m|}{|v|^t \mathrm{P}^{t_0}} \\
&\lesssim \frac{|E_m|}{|v|^{t-\alpha-\gamma} \mathrm{P}^{t_0}}.
\end{aligned}$$

Falls nun $t - \gamma - \delta \leq 2$ gilt, hat der Kern bereits die gewünscht Form. Andernfalls schätzen wir restliche Potenzen von $|v|$ im Nenner jeweils nach oben durch $\mathrm{P}^{\frac{1}{2}}$ ab, also

$$\lesssim \frac{|E_m|}{|v|^2 \mathrm{P}^{t_0 + t - \alpha - \gamma - 2}}.$$

Der so entstehende Kern hat den Typ

$$\mu = 2n - 2t_0 + (t - \alpha - \gamma) + m \qquad \text{für } t - \alpha - \gamma < 2$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mu &= 2n + 2 - 4 - 2(t_0 + t - \alpha - \gamma - 2) + m \qquad \text{für } t - \alpha - \gamma \geq 2 \\ &= 2n + 2 - 2(t - \alpha - \gamma) - 2t_0 + m, \end{aligned}$$

und in beiden Fällen gilt somit $\mu = \lambda$.

Um Satz 50 zu zeigen, genügt es jetzt, die Beschränktheit von Integralen der Form

$$I_\zeta := \int\limits_U \left[\frac{|E_m|}{|v|^{t'} \mathrm{P}^{t_0'}} \right]^\sigma dl(\zeta) \tag{53}$$

zu zeigen, denn Kerne vom Typ (II) haben ohnehin keine Singularität, erfüllen die Behauptung des Satzes also für jedes σ.

Wir verwenden erneut das zulässige Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_{2n}$ aus Satz 48, wobei wiederum vorausgesetzt sei, daß $U \cap D$ im Zylinder $\tilde{U} := (0,1) \times (-1,1) \times B_1^{(2n-2)}(0)$ enthalten ist.

Aus Lemma 39 stehen uns (in neuen Koordinaten ausgedrückt) die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |v| &\gtrsim x_1 + |x_2| + (-r) + \|\tilde{x}\|^2, \\ |\mathrm{P}| &\gtrsim x_1^2 + x_2^2 + \|\tilde{x}\|^2, \\ |E_m| &\lesssim (x_1^2 + x_2^2 + \|\tilde{x}\|^2)^{\frac{m}{2}} \end{aligned}$$

zur Verfügung. Indem wir diese in Gleichung (53) einsetzen erhalten wir

$$I_\zeta \lesssim \int\limits_{\tilde{U}} \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \|\tilde{x}\|^2)^{\sigma \frac{m}{2}}}{(x_1 + |x_2| + (-r) + \|\tilde{x}\|^2)^{\sigma t} (x_1^2 + x_2^2 + \|\tilde{x}\|^2)^{\sigma t_0}} dl(x).$$

Falls nun $\frac{m}{2} \geq t + t_0$, dann gilt

$$I_\zeta \lesssim \int\limits_{\tilde{U}} (x_1^2 + x_2^2 + (-r) + \|\tilde{x}\|^2)^{\sigma(\frac{m}{2} - t - t_0)} dl(x) \qquad \lesssim C,$$

denn der Integrand hat keine Singularität mehr, ist stetig auf $\overline{D} \times \overline{D}$ und somit nach oben durch eine Konstante beschränkt, so daß $(*_\zeta)$ sicherlich erfüllt ist. Falls für m zumindest noch gilt, daß $t_0 + t > \frac{m}{2} > t_0$ ist, so erhalten wir

$$I_\zeta \lesssim \int\limits_{\tilde{U}} \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \|\tilde{x}\|^2)^{\sigma(\frac{m}{2} - t_0)}}{(x_1 + |x_2| + (-r) + \|\tilde{x}\|^2)^{\sigma t}} dl(x).$$

Die Differenz im Exponenten können wir aus der Typgleichung

$$\lambda = 2n - t - 2t_0 + m$$

als $\frac{m}{2} - t_0 = \frac{\lambda}{2} + \frac{t}{2} - n$ bestimmen. Wir kürzen den isotropen Zähler mit Potenzen aus dem Nenner und erhalten

$$\lesssim \int\limits_{\tilde{U}} \frac{1}{(x_1 + |x_2| + (-r) + \|\tilde{x}\|^2)^{\frac{\sigma}{2}(2n+t-\lambda)}} \qquad \lesssim C,$$

denn nach Voraussetzung ist $t \leq 2$ und $\sigma(2n + 2 - \lambda) < 2n + 2$, die Potenz des Nenners also kleiner als $n + 1$ und damit nach Satz 48 das Integral beschränkt.

Im verbleibenden Fall $\frac{m}{2} \leq t_0$ kürzen wir wiederum die isotropen Anteile miteinander:

$$I_\zeta \lesssim \int\limits_{\tilde{U}} \frac{1}{(x_1 + |x_2| + (-r) + \|\tilde{x}\|^2)^{\sigma t}(x_1^2 + x_2^2 + \|\tilde{x}\|^2)^{\sigma(t_0 - \frac{m}{2})}} dl(x)$$

und wandeln $\tilde{x}$ in Polarkoordinaten um. Weiterhin schätzen wir $(-r) \geq 0$ ab:

$$\lesssim \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{s^{2n-3}}{(x_1 + x_2 + s^2)^{\sigma t}(x_1^2 + x_2^2 + s^2)^{\sigma(t_0 - \frac{m}{2})}} dx_1\, dx_2\, ds.$$

Aus der Typgleichung folgt $t_0 - \frac{m}{2} = n - \frac{\lambda}{2} - \frac{t}{2}$, also

$$\lesssim \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{s^{2n-3}}{(x_1 + x_2 + s^2)^{\sigma t}(x_1^2 + x_2^2 + s^2)^{\frac{\sigma}{2}(2n-\lambda-t)}} dx_1\, dx_2\, ds.$$

Mittels der Beziehung $(a + b)^k \gtrsim a^{k-\eta} b^\eta$ für $a, b > 0$ und $0 \leq \eta \leq k$ schätzen wir den Nenner gegen ein Produkt ab:

$$(x_1 + x_2 + s^2)^{\sigma t} \;\gtrsim\; x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_1} s^{2\sigma t - 2 - 2\eta_1},$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + s^2)^{\frac{\sigma}{2}(2n-\lambda-t)} \;\gtrsim\; x_1^{\eta_2} x_2^{\eta_2} s^{\sigma(2n-\lambda-t) - 2\eta_2},$$

so daß gilt

$$\lesssim \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{x_1^{\eta_1+\eta_2} x_2^{\eta_1+\eta_2} s^{\sigma(2n-\lambda+t)-2n+1-2(\eta_1+\eta_2)}} dx_1\, dx_2\, ds.$$

Dieses Integral ist genau dann beschränkt, wenn wir η_1 und η_2 wählen können, so daß

$$\eta_1 + \eta_2 < 1 \qquad \text{und} \qquad \sigma(2n - \lambda + t) - 2n + 1 - 2(\eta_1 + \eta_2) < 1.$$

Nun gilt insbesondere $t \leq 2$ und nach Voraussetzung also $\sigma(2n - \lambda + t) < 2n + 2$. Wegen der strengen Ungleichung finden wir ein $\varepsilon > 0$, so daß bei Wahl von $\eta_1 + \eta_2 = 1 - \varepsilon$ beide Ungleichungen erfüllt sind.

In allen drei Fällen erhalten wir die Aussagen für die Integration über z nach analoger Konstruktion bzw. aus der entsprechenden Aussage von Satz 48. Damit ist der Beweis von Satz 50 abgeschlossen.

Im Beweis haben wir den Nenner des Kerns gegen Potenzen von x_1, x_2 und s abgeschätzt, deren Exponent jeweils größer als -1 war, so daß das verbleibende Integral beschränkt ist. Da x_1 als Randfunktion bezüglich der Integrationsvariablen definiert war, können wir auf die gleiche Weise auch Kerne kontrollieren, die nach unserer Definition nicht zulässig sind, weil sie bereits selbst eine negative Potenz der Randfunktion enthalten:

Satz 54. *Es sei $\mathcal{K}(\zeta, z)$ ein stetiger Integralkern auf $\overline{D} \times \overline{D} \setminus \Lambda$, der in der Nähe von Λ die Form*

$$|\mathcal{K}(\zeta, z)| = \frac{(-r)^\gamma (-\rho)^\delta |E_m|^\sigma}{|v|^t \mathrm{P}^{t_0}}$$

mit $\gamma, t, t_0 \geq 0$ und $\delta > -1$ hat, wobei noch

$$\lambda := 2n + \min(2, t - \gamma - \delta) - 2(t - \gamma - \delta) - 2t_0 + \sigma m > 0.$$

Dann ist $\mathcal{K}$ über ζ integrierbar und das Integral ist gleichmäßig in z beschränkt:

$$\sup_{z \in \overline{D}} \int_D |\mathcal{K}(\zeta, z)| \, dl(\zeta) \leq M$$

Die analoge Aussage gilt auch für Kerne mit $\delta \geq 0$, $\gamma > -1$ bei Integration bezüglich z.

Beweis. Im Beweis geben wir wie bei den Abschätzungen zu Satz 50 vor. Falls δ tatsächlich negativ ist, müssen wir bei den Abschätzungen im Nenner darauf achten, daß die Gesamtpotenz von x_1 größer als -1 bleibt. Es zeigt sich aber, daß dies wegen der Voraussetzung an λ stets möglich ist.

Für Kerne mit negativer Potenz von $(-r)$ folgt die Aussage analog, da bei Integration bezüglich z wiederum $(-r)$ Teil eines zulässigen Koordinatensystems ist.

Zuletzt zeigen wir, daß wir für diejenige Teilklasse von Kernen, welche wir im Kapitel über Bergmanräume untersuchen werden, sogar bei Typ 0 gleichmäßige Integrierbarkeit erhalten:

Satz 55. *Es sei $\mathcal{A}(\zeta, z)$ zulässig vom Typ $\lambda = 0$, und in den lokalen Darstellungen von $\mathcal{A}$ sei stets $t_0 = 0$, also*

$$|\mathcal{A}| = \frac{(-r)^\gamma (-\rho)^\delta |E_m|}{|v|^t}.$$

Falls $\gamma > 0$ und $\delta \geq 0$ gilt, dann ist $\mathcal{A}$ bezüglich ζ absolut integrierbar und das Integral gleichmäßig beschränkt in z, d. h. es gibt eine Konstante $M > 0$ mit

$$\int_D |\mathcal{A}| dl(\zeta) < M. \qquad (**_z)$$

Falls $\gamma \geq 0$ und $\delta > 0$ ist, dann gilt die gleiche Aussage mit ζ und z vertauscht, also

$$\int_D |\mathcal{A}| dl(z) < M. \qquad (**_\zeta)$$

Beweis. Wir müssen wie üblich nur in Nähe der Randdiagonalen arbeiten und wählen dort feste Umgebungen $U_z \times U_\zeta$. Wir beweisen zunächst $(**_z)$, zeigen also, daß das Integral über U_ζ

$$I_\zeta(z) := \int_{U_\zeta} \frac{(-r)^\gamma (-\rho)^\delta |E_m|}{|v|^t} dl(\zeta)$$

unabhängig von z beschränkt ist, wenn $\gamma > 0$ gilt.

Wir führen dazu wiederum zulässige Koordinaten $(x_1, x_2, \tilde{x})$ wie im Beweis von 48 ein und können wiederum annehmen, daß das Integrationsgebiet bezüglich dieser Koordinaten im Zylinder $\tilde{U} := (0,1) \times (-1,1) \times B_1^{(2n-2)}(0)$ enthalten ist.

Wir setzen $t' := t - \gamma - \delta$ und schätzen den Nenner ab mit Hilfe von

$$\begin{aligned} |v|^t &\gtrsim (x_1 + |x_2| + (-r) + R^2)^{t'+\gamma+\delta} \\ &\gtrsim x_1^\delta R^m (x_1 + |x_2| + (-r) + \|\tilde{x}\|^2)^{t' - \frac{m}{2} + \gamma}. \end{aligned}$$

Aus der Typgleichung $2n + \min(2, t') - 2t' + m = \lambda = 0$ ergibt sich dabei wegen $n \geq 2$, daß $t' \geq 2$ gelten muß, also

$$t' - \frac{m}{2} = n + 1,$$

und man sieht, daß die auftretenden Exponenten nicht negativ sind. Wir können $(-\rho)^\delta$ und x_1^δ gegeneinander kürzen und den E_m-Term gegen den Faktor R^m abschätzen. So erhalten wir

$$I_\zeta(z) \lesssim (-r)^\gamma \int_{\tilde{U}} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dl(\tilde{x})}{(x_1 + |x_2| + (-r) + \|\tilde{x}\|^2)^{n+1+\gamma}}.$$

Die Potenz des Nenners ist dabei groß genug, daß wir die $(2n-2)$-dimensionale Integration über $\tilde{x}$ ausführen können:

$$\lesssim (-r)^{\gamma + \frac{\kappa}{2}} \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{(x_1 + |x_2| + (-r))^{2+\gamma}} dx_1\, dx_2.$$

Da $\gamma > 0$ ist, können wir auch die Integration über x_2 und x_1 auf diese Weise durchführen und erhalten

$$\begin{aligned} &\lesssim (-r)^{\gamma}[(-r)^{-\gamma} - C] \\ &< M \end{aligned}$$

für ein $M > 0$. Damit ist $(**_z)$ gezeigt.

Die Abschätzung $(**_\zeta)$ bezüglich der z-Variablen ist wiederum vollkommen symmetrisch möglich. In diesem Fall muß $\delta > 0$ gelten, damit beim letzen Integrationsschritt kein logarithmischer Term auftritt.

3.3 Stetigkeit zulässiger Operatoren

Mit Hilfe der Kernabschätzungen aus dem letzten Abschnitt können wir nun die Abbildungseigenschaften zulässiger Operatoren charakterisieren.

Satz 56. *Es sei A_λ ein zulässiger Operator vom Typ $\lambda > 0$. Dann ist*

$$A_\lambda : L^p(D) \to L^r(D)$$

ein stetiger Operator für $1 \leq p, r \leq \infty$, wenn

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{\lambda}{2n+2},$$

ist, wobei $\frac{1}{\infty}$ als 0 zu lesen ist.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß der Kern $\mathcal{A}_\lambda$ des Operators den Voraussetzungen des Youngschen Lemmas 45 mit $X = Y = D$ und $1 \leq \sigma < \frac{2n+2}{2n+2-\lambda}$ genügt, also, daß $|\mathcal{A}_\lambda|^\sigma$ bezüglich ζ und z gleichmäßig integrierbar ist. Das war gerade die Aussage von Satz 50, und die Typvoraussetzung an A_λ ermöglicht uns, diesen anzuwenden.

Für allgemeine Kerne vom Typ 0 können bei der Integration Terme auftreten, die sich wie der der Logarithmus der Randfunktion verhalten, also auf $\overline{D}$ unbeschränkt sind. Indem wir jedoch im Bildraum eine Gewichtung einführen, welche gegenüber $\log(-r)$ dominiert, erhalten wir zumindest noch:

Satz 57. *Es sei A_λ ein zulässiger Operator vom Typ $\lambda \geq 0$. Es sei $\varepsilon > 0$, dann ist für jedes $1 \leq p \leq \infty$*

$$A_\lambda : L^p(D) \to L^p(D; (-r)^\varepsilon),$$

ein stetiger Operator, wobei

$$L^p(D; (-r)^\varepsilon) := \{f \in L^p_{\text{loc}}(D) \ : \ \int_D (-r)^\varepsilon |f|^p dl < \infty\}.$$

Beweis. Da

$$||A_\lambda f||_{L^p(D;(-r)^\varepsilon)} = \int\limits_D (-r)^\varepsilon \left|\left\langle f, \overline{A_\lambda}\right\rangle\right|^p dl = \int\limits_D \left|\left\langle f, \overline{(-r)^{\frac{\varepsilon}{p}} \mathcal{A}_\lambda}\right\rangle\right|^p dl$$

gilt, genügt es zu zeigen, daß für jedes $\varepsilon > 0$ der Kern $(-r)^{\frac{\varepsilon}{p}} \mathcal{A}_\lambda$ einen Operator induziert, der L^p stetig nach L^p abbildet. Da dieser Kern aber wiederum zulässig und sein Typ größer als λ ist – also insbesondere echt größer als 0 – folgt dies aus Satz 56.

Da im letzen Satz $\varepsilon > 0$ beliebig war, können wir die analoge Aussage für den Durchschnitt der Zielräume folgern:

Korollar 58. *Es sei A_λ ein zulässiger Operator vom Typ $\lambda \geq 0$. Dann gilt für jedes $1 \leq p \leq \infty$:*

$$A_\lambda : L^p(D) \to \bigcap_{\varepsilon > 0} L^p(D; (-r)^\varepsilon)$$

Außerdem können wir zeigen, daß für viele Operatoren von echt positivem Typ, der Unterschied zwischen $L^p(D)$ und $\bigcap_{\varepsilon>0} L^p(D; (-r)^\varepsilon)$ keine Rolle spielt:

Satz 59. *Es sei A_λ ein zulässiger Operator vom Typ $\lambda > 0$, dessen lokale Darstellungen jeweils eine echt positive Potenz von $(-\rho)$ enthalten. Dann gilt für jedes $1 \leq p \leq \infty$*

$$A_\lambda : \bigcap_{\varepsilon>0} L^p(D; (-\rho)^\varepsilon) \ \to \ L^r(D)$$

falls

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{\lambda}{2n+2}.$$

Beweis. Da

$$||A_\lambda f||_{L^p} = \int\limits_D \left|\left\langle (-\rho)^\varepsilon f, \overline{(-\rho)^{-\varepsilon} \mathcal{A}_\lambda}\right\rangle\right|^p dl$$

und für jedes $\varepsilon > 0$ noch $(-\rho)^\varepsilon f \in L^p$ gilt, genügt es zu zeigen, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß der Kern $(-\rho)^{\frac{-\varepsilon}{p}} \mathcal{A}$ noch einen Operator induziert, welcher L^p stetig nach L^r abbildet.

Das ist in der Tat der Fall, da für genügend kleines $\varepsilon > 0$, der Kern $(-\rho)^{\frac{-\varepsilon}{p}} \mathcal{A}$ wieder zulässig ist, und sein Typ λ' sich um beliebig wenig von λ unterscheidet, so daß wir erreichen können, daß auch $\frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{\lambda'}{2n+2}$ noch erfüllt ist. Die Behauptung folgt dann nach Satz 56.

Für spezielle Kerne vom Typ 0 erhalten wir außerdem:

Satz 60. *Es sei $\mathcal{A}$ ein zulässiger Kern vom Typ 0, der lokale Darstellungen*

$$|\mathcal{A}| = \frac{(-r)^{\gamma}(-\rho)^{\delta}|E_m|}{|v|^t}$$

mit $\gamma > 0$ und $\delta > 0$ besitzt. Dann induziert $\mathcal{A}$ einen Operator

$$A_\lambda : L^p(D) \to \; L^p(D).$$

Beweis. Für solche Kerne sind nach Satz 55 die Voraussetzungen des Youngschen Lemma mit $\sigma = 1$ erfüllt, daraus ergibt sich die Behauptung.

3.4 Gleichmäßige Regularität

Um später über die Randwerte zulässiger Operatoren sprechen zu können, benötigen wir eine weitere Eigenschaft zulässiger und isotroper Kerne, die etwas darüber aussagt, wie gleichmäßig eine eventuell auftretende Singularität von den Parametern abhängt, bzw. genauer, wie stark ihr Gewicht auf einen Punkt konzentriert ist. Wir führen dazu eine Definition von Hefer [Hef 02] ein:

Definition 61. Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ glatt berandet, und $k(\zeta, z)$ sei eine stetige Funktion auf $\overline{D} \times \overline{D} - \Delta$. Dann heißt $k(\zeta, z)$ *gleichmäßig regulär*, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1) k ist *gleichmäßig integrierbar* in beiden Variablen, d. h. es gibt eine Konstante M mit

$$\sup_{z \in \overline{D}} \int_D |k(\zeta, z)| \, dl(\zeta) \le M$$

und

$$\sup_{\zeta \in \overline{D}} \int_D |k(\zeta, z)| \, dl(z) \le M.$$

2) Für jedes $z_0 \in \overline{D}$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $z \in B_\delta(z_0)$

$$\int_{D \cap B_\delta(z_0)} |k(\zeta, z)| \, dl(\zeta) < \varepsilon.$$

Unser erstes Ergebnis ist nun analog zu den Sätzen 47 und 48:

Satz 62.

i) Isotrope Kerne vom Typ $\lambda > 0$ sind gleichmäßig regulär.

ii) Kerne von der Form $|\mathcal{A}| = \dfrac{1}{|v|^{n+1+t}}$ mit $t < 0$ sind gleichmäßig regulär.

iii) Zulässige Kerne vom Typ $\lambda > 0$ sind gleichmäßig regulär.

Beweis. Kriterium 1) entspricht den Voraussetzungen des Youngschen Lemmas mit $\sigma = 1$, ist also nach Satz 47 bzw. 56 für alle drei Fälle wegen des positiven Typs erfüllt. Kriterium 2) beweisen wir jeweils mit ähnlichen Methoden:

Zunächst sei E_m ein isotroper Kern von Ordnung m und Typ $2n+m>0$. Dann gilt für jedes $z \in B_\delta(z_0)$, daß $B_\delta(z_0) \subset B_{2\delta}(z)$, also

$$\int\limits_{D\cap B_\delta(z_0)} |E(\zeta,z)|\, dl(\zeta) \lesssim \int\limits_{D\cap B_{2\delta}(z)} \frac{|\zeta - z|^{m'}}{|\zeta - z|^{m+m'}}\, dl(\zeta) \;\lesssim\; \delta^{2n-m},$$

wobei die (unterdrückten) Konstanten unabhängig von z_0 und z sind. Da $2n+m > 0$ ist, können wir erreichen, daß das Integral beliebig klein wird, indem wir δ klein genug wählen, und sehen so, daß das Kriterium erfüllt ist.

Für Kerne wie in ii) bemerken wir zunächst, daß wir Kriterium 2) nur für $z_0 \in bD$ zeigen müssen, denn andernfalls gibt es immer eine Umgebung von $U = B_\delta(z_0) \subset D$, so daß $k(\zeta,z)$ glatt in $\overline{U} \times \overline{U}$ ist, also insbesondere das betrachtete Integral durch ein konstantes Vielfaches von δ^{2n} abgeschätzt werden kann.

Es sei also $z_0 \in bD$ und $U = B_\delta(z_0) \cap D$. Wir sind dann fast in der gleichen Situation wie im Beweis von Satz 56, also verwenden wir das gleiche Koordinatensysten, können die gleiche Kernstruktur annehmen, und es ist hinreichend zu zeigen, daß für $t < 0$ und genügend klein gewähltes δ

$$I_\delta := \int\limits_{D\cap B_\delta(z_0)} \frac{dl(x)}{(x_1 + |x_2| + \|\tilde{x}\|^2)^{n+1+t}} \;< \varepsilon$$

gilt. Wiederum können wir annehmen, daß $D \cap B_\delta(z_0)$ in einem Zylinder $P_{\delta'} := (0,\delta') \times (-\delta',\delta') \times B^{(2n-2)}_{\delta'}(0)$ enthalten ist, wobei $\delta' = c\delta$ für ein festes $c > 0$. Es folgt

$$I_\delta \lesssim \int\limits_{P_{\delta'}} \frac{dl(\zeta)}{(x_1 + |x_2| + \|\tilde{x}\|^2)^{n+1+t}},$$

also mit $\tilde{x}$ in Polarkoordinaten

$$\lesssim \int\limits_0^{\delta'}\int\limits_0^{\delta'}\int\limits_0^{\delta'} \frac{s^{2n-3}}{(x_1 + x_2 + s^2)^{n+1+t}}\, dx_1\, dx_2\, ds.$$

Im allgemeinen Fall können wir über x_1 und x_2 integrieren und verbleiben mit

$$\begin{aligned}&\lesssim \int\limits_0^{\delta'} \frac{1}{s^{1+2t}} ds\\ &\lesssim \delta'^{-2t}.\end{aligned}$$

Da $t < 0$ und $\delta' = c\delta$ vorausgesetzt war, verhält sich das Integral also wie eine positive Potenz von δ. Die Spezialfälle $n + 1 + t \in \{1, 2\}$ ergeben sich noch einfacher mit einem ähnlichen Argument wie in Satz 48.

Das Ergebnis $iii)$ erhalten wir analog zum Beweis von Satz 56. Wir betrachten nur

$$I_\delta \lesssim \int\limits_{P_{\delta'}} \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \|\tilde{x}\|^2)^{\frac{m}{2}}}{(x_1 + x_2 + (-r) + \|\tilde{x}\|^2)^t (x_1^2 + x_2^2 + \|\tilde{x}\|^2)^{t_0}} \, dl(x),$$

denn Kerne von der Form (II) sind ohnehin singularitätenfrei und damit gilt $I_\delta \lesssim \delta^{2n}$ für sie. Gleiches ist hier für $\frac{m}{2} > t + t_0$ der Fall. Ansonsten erhalten wir mit $\tilde{x}$ in Polarkoordinaten

$$\lesssim \int\limits_0^{\delta'} \int\limits_0^{\delta'} \int\limits_0^{\delta'} \frac{(x_1^2 + x_2^2 + s^2)^{\frac{m}{2}} s^{2n-3}}{(x_1 + x_2 + s^2)^t (x_1^2 + x_2^2 + s^2)^{t_0}} \, dx_1 \, dx_2 \, ds.$$

Für $t_0 + t > \frac{m}{2} > t_0$ können wir das Integral wie in Satz 56 gegen einen Kern abschätzen, der in $ii)$ abgehandelt wurde. Die Bedingung $\lambda > 0$ entspricht dabei gerade dem Kriterium $t < 0$. Im verbleibenden Fall $\frac{m}{2} \leq t_0$ mit $t_0 - \frac{m}{2} = \frac{1}{2}(2n - \lambda - t)$ wenden wir zunächst die gleichen Abschätzungen wie für Satz 56 an und erhalten wie dort (mit $\sigma = 1$):

$$\lesssim \int\limits_0^{\delta'} \int\limits_0^{\delta'} \int\limits_0^{\delta'} \frac{1}{x_1^{\eta_1+\eta_2} x_2^{\eta_1+\eta_2} s^{t-\lambda+1-2(\eta_1+\eta_2)}} dx_1 \, dx_2 \, ds$$

mit $\eta_1 + \eta_2 < 1$ und $t - \lambda + 1 - 2(\eta_1 + \eta_2) < 1$. Durch Integration erhalten wir

$$\lesssim \delta'^\eta$$

für ein $\eta > 0$, was wiederum eine positivem Potenz von δ impliziert. In allen drei Fällen können wir das Integral also durch geeignete Wahl von δ beliebig klein machen. Damit ist die Behauptung gezeigt.

3.5 Weitere Regularitätssätze

Durch unser Wissen über die gleichmäßige Regularität gewisser Kerne erhalten wir auch Regularitätsaussagen, die sich nicht auf nur L^p-Integrierbarkeit beziehen:

Korollar 63. *Zulässige und isotrope Operatoren von echt positivem Typ bilden $L^\infty(D)$ nach $C^0(\overline{D})$ ab. Die gleiche Aussage gilt allgemein für gleichmäßig reguläre Operatoren.*

Beweis. Die erste Aussage ist ein Spezialfall der zweiten, und wir führen den Beweis direkt für gleichmäßig reguläre Operatoren: Es sei $\mathcal{A}(\zeta, z)$ der Kern des Operators, es sei

$f \in L^\infty(D)$ und $z_0 \in \overline{D}$. Für $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ passend gewählt wie in der Definition 61 von gleichmäßiger Regulariät, dann gilt für alle $z \in B_\delta(z_0) \cap D$

$$\begin{aligned}
|Af(z)-Af(z_0)| &\leq \int\limits_D |\mathcal{A}(\zeta,z)-\mathcal{A}(\zeta,z_0)||f(\zeta)|\,dl(\zeta) \\
&\leq ||f||_\infty \int\limits_D |\mathcal{A}(\zeta,z)-\mathcal{A}(\zeta,z_0)|\,dl \\
&\leq ||f||_\infty \left[\int\limits_{D\cap B_\delta} |\mathcal{A}(\zeta,z)|\,dl + \int\limits_{D\cap B_\delta} |\mathcal{A}(\zeta,z_0)|\,dl + \int\limits_{D\setminus B_\delta} |\mathcal{A}(\zeta,z)-\mathcal{A}(\zeta,z_0)|\,dl\right] \\
&\leq ||f||_\infty \left[2\varepsilon + \int\limits_{D\setminus B_\delta} |\mathcal{A}(\zeta,z)-\mathcal{A}(\zeta,z_0)|\,dl\right].
\end{aligned}$$

Wenn bei festem δ nun $z \to z_0$ konvergiert, konvergiert das Integral gegen 0, denn $\mathcal{A}(\zeta,z)$ ist gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum $\overline{D \setminus B_\delta} \times \overline{B_\delta}$. $|\mathcal{A}(\zeta,z) - \mathcal{A}(z_0,\zeta)|$ wird also beliebig klein. Da ε beliebig war, folgt die Stetigkeit der Bildform

$$\lim_{z\to z_0} Af(z) = Af(z_0) \quad \text{für alle } z_0 \in \overline{D}.$$

Für Kerne von kleinerem oder gar negativem Typ ist keine L^p-Stetigkeit mehr zu erwarten. Wir erhalten nur noch

Lemma 64. *Sei A ein Integraloperator mit Kern $\mathcal{A}(\zeta,z)$ vom Typ $\lambda > -1$. Dann gilt*

$$A : L^\infty(D) \to L^1(D).$$

Beweis. Es sei $f \in L^\infty(D)$. Dann gilt zumindest noch $(-\rho)^{-\eta} f =: f' \in L^1(D)$ für jedes $\eta < 1$. Wir schreiben nun Af als $A'f'$, wobei A' den Kern $(-\rho)^\eta \mathcal{A}(\zeta,z)$ hat. Für genug groß gewähltes η hat A' dann aber einen Typ > 0, so daß wir $A' : L^1(D) \to L^1(D)$ wissen. Also gilt $A'f' \in L^1(D)$, was gleichbedeutend ist mit $Af \in L^1(D)$.

Durch geschicktere Wahl von η in Abhängigkeit von λ können wir auch höhere L^p-Räume erreichen, aber wir werden diese Aussage nicht benötigen.

Während die bisherigen Sätze Voraussetzungen an die Integrierbarkeit des Kernes jeweils in beiden Variablen stellten, können wir Stetigkeit in L^∞ auch durch die schwächere Voraussetzung der Integrierbarkeit nur in der Integrationsvariable sichern:

Satz 65. *Es sei A ein Integraloperator mit Kern $\mathcal{A}(\zeta,z)$, so daß gleichmäßig*

$$\int\limits_D |\mathcal{A}(\zeta,z)|\,dl(\zeta) \leq M, \qquad \textit{für fast alle } z \in D.$$

Dann ist A ein stetiger Operator

$$A : L^\infty(D) \to L^\infty(D).$$

Beweis. Der Beweis ist eine einfache Norm-Abschätzung:

$$\begin{aligned}\sup_{z\in D}|Af(z)| &\le \sup_{z\in D}\int\limits_D |\mathcal{A}(\zeta,z)||f(\zeta)|dl(\zeta)\\ &\le ||f||_\infty \sup_{z\in D}\int\limits_D |\mathcal{A}(\zeta,z)|\ dl(\zeta)\\ &\le M||f||_\infty.\end{aligned}$$

Also ist A beschränkt mit Operatornorm höchstens M.

3.6 Z-Operatoren

An den bisherigen Regularitätsergebnissen sieht man, daß isotrope und zulässige Operatoren vom gleichen Typ auch ähnliche Regularitätseigenschaften haben. Wir führen daher eine gemeinsame Operatorenklasse für sie ein. Um technische Probleme zu vermeiden, setzen wir dabei voraus, daß alle Operatoren ganzzahligen Typ haben. Das ist keine wesentliche Einschränkung, und alle in der Arbeit behandelten Operatoren erfüllen diese Bedingung ohnehin.

Definition 66. Es sei $\mathfrak{Z}$ induktiv als kleinste Operatorenalgebra definiert, welche die zulässigen und isotropen Operatoren sowie deren Komposita enthält:

- Es sei A_λ zulässig vom Typ ≥ 1, dann ist $A_\lambda \in \mathfrak{Z}$.
- Es sei E_l isotrop vom Typ ≥ 1, dann ist $E_l \in \mathfrak{Z}$.
- Es seien $Z^1, Z^2 \in \mathfrak{Z}$, dann ist $Z^1 \circ Z^2 \in \mathfrak{Z}$.

Operatoren in $\mathfrak{Z}$ nennen wir *Z-Operatoren*. Analog zu den Typen zulässiger und isotroper Operatoren graduieren wir diese:

- Falls ein $Z \in \mathfrak{Z}$ zulässig vom Typ λ, dann ist $Z \in \mathfrak{Z}_\lambda$,
- Falls ein $Z \in \mathfrak{Z}$ isotrop vom Typ l, dann ist $Z \in \mathfrak{Z}_l$,
- Falls ein $Z \in \mathfrak{Z}$ die Form $Z^1 \circ Z^2$ mit $Z^1 \in \mathfrak{Z}_a$ und $Z^2 \in \mathfrak{Z}_b$ hat, dann ist $Z \in \mathfrak{Z}_{a+b}$.

Operatoren in $\mathfrak{Z}_\lambda$ heißen Z-Operatoren vom Typ λ. Wir verwenden wiederum die generische Schreibweise $A = Z_\lambda$ für $A \in \mathfrak{Z}_\lambda$, also um zu symbolisieren, daß A ein Z-Operator vom Typ λ ist.

Da wir im allgemeinen nicht erwarten können, daß abstrakt definierte Integralkerne sich als vollständig explizite Ausdrücke schreiben lassen, werden bei der Beschreibung solcher Kerne auch Fehlerterme eine Rolle spielen, die nicht selbst zulässig sind, aber asymptotisch zulässiges Verhalten zeigen. Wir formalisieren dies durch

Definition 67. Einen Operator $T : L^2 \to L^2$ nennen wir *asymptotischen Z-Operator vom Typ λ*, falls es für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen zulässigen Operator A_λ und endlich viele weitere Z-Operatoren $B^{(j)}_\mu$ mit $\mu \geq k$ gibt, so daß jeweils

$$T = A_\lambda + \sum B^{(j)}_\mu \circ R^{(j)}$$

gilt, wobei die $R^{(j)}$ beliebige beschränkte Operatoren von L^2 nach L^2 sind. Für asymptotische Z-Operatoren schreiben wir wiederum generisch

$$T = Z^a_\lambda.$$

Asymptotische Z-Operatoren vom Typ λ werden also durch eine Folge von Z-Operatoren vom Typ λ „approximiert“, womit gemeint ist, daß die auftretenden Differenzenterme sich quasi wie beliebig hohe Z-Operatoren verhalten.

Auf dieser Grundlage können wir den zuvor nur intuitiv benutzten Begriff „Hauptteil eines Operators“ präzisieren:

Definition 68. Es sei $\mathcal{K}$ der Integralkern eines Operators K und $\mathcal{A}_\lambda$ ein zulässiger Kern vom Typ λ. Dann sagen wir: $\mathcal{A}_\lambda$ ist *Hauptteil von* $\mathcal{K}$ bzw. für die zugehörigen Operatoren A_λ ist *Hauptteil von K*, falls es einen asymptotischen Z-Operator $Z^a_{\lambda+1}$ gibt, so daß

$$K = A_\lambda + Z^a_{\lambda+1}$$

ist.

Daß wir generell Z-Operatoren von hohem Typ als Fehlerterme zulassen, liegt an ihrer Glättungseigenschaft:

Satz 69. *Es sei $Z^{(j)}$ eine Folge von Z-Operatoren, die jeweils vom Typ ≥ 1 sind. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß*

$$Z := Z^{(N)} \circ Z^{(N-1)} \circ \ldots \circ Z^{(1)} : L^p(D) \to C^0(\overline{D}) \qquad \textit{für } 1 \leq p \leq \infty.$$

Beweis. Ein Z-Operator vom Typ ≥ 1 ist entweder ein zulässiger Operator vom Typ ≥ 1, ein isotroper Operator vom Typ ≥ 1 oder eine Komposition von solchen. Da wir ohnehin eine Aussage über die Komposition solcher Operatoren machen wollen, genügt es, die beiden elementaren Fälle $Z^{(j)} = A_\lambda$ und $Z^{(j)} = E_\lambda$ zu betrachten.

Für beide Operatoren gilt nach Satz 56 bzw. 47, daß sie $L^p \to L^r$ mit $r > p$ abbilden, wenn $\frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{\lambda}{2n+2}$.

Da $\frac{1}{r}$ gegenüber $\frac{1}{p}$ in jedem Iterationsschritt um fast $\frac{\lambda}{2n+2}$ erniedrigt werden kann, erreicht man nach endlich vielen Schritten einen Raum $L^{p'}$ mit $\frac{1}{p'} < \frac{\lambda}{2n+2}$, der durch eine weitere Anwendung eines Z-Operators nach L^∞ abgebildet wird.

$$Z^{(N-1)} \circ \ldots \circ Z^1 : L^p(D) \to L^\infty(D)$$

Nach Korollar 63 liegt das Bild nach einer weiteren Anwendung eines Z-Operators dann in $C^0(\overline{D})$, d. h. insgesamt

$$Z^{(N)} \circ Z^{(N-1)} \circ \ldots \circ Z^{(1)} : L^p(D) \to C^0(\overline{D}),$$

was zu zeigen war.

4 Tangentiale Regularität zulässiger Operatoren

Korollar 63 und die Eigenschaften von Z-Operatoren legen nahe, daß alle zulässigen Operatoren in gewisser Weise glättend wirken, wobei der Typ des Kernes etwas über den Grad der Glättung aussagt. Unser nächstes Ziel ist daher, Aussagen über die Ableitungen zulässiger Operatoren zu gewinnen. Zunächst zeigen wir ein wichtiges Lemma über das Verhalten des Typs bei Differentiation des Kernes.

Lemma 70. *Es sei $\mathcal{A}_\lambda$ ein zulässiger Kern auf $\overline{D} \times \overline{D}$. Es sei X ein Vektorfeld, das in ζ oder z wirkt, mit Koeffizienten, die glatt bis zum Rand sind. Dann gilt*

$$X\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}_{\lambda-2},$$

falls

- *X in z wirkt und $\gamma = 0$ oder $\gamma \geq 1$ in der lokalen Darstellung (41) ist oder*
- *X in ζ wirkt und $\delta = 0$ oder $\delta \geq 1$ in der lokalen Darstellung (41) ist.*

Beweis. Generell gilt, daß $\mathcal{A}_\lambda$ glatt ist, wenn (ζ, z) im Innern des Produktgebietes $D \times D$ liegt. Gleiches gilt also auch für $X\mathcal{A}_\lambda$. Wir müssen daher nur untersuchen, ob es in Randnähe geeignete lokale Darstellungen gibt. Es sei dazu z und ζ aus $U(z_0)$ für einen Randpunkt z_0, und es sei $\mathcal{A}_\lambda$ dargestellt in der Form

$$\mathcal{A}(\zeta, z) = (-\rho)^\delta (-r)^\gamma \mathrm{P}^{-t_0} v^{t_1} \bar{v}^{t_2} v^{*t_3} \bar{v}^{*t_4} E_m.$$

Wenn X auf $\mathcal{A}_\lambda$ wirkt, erhalten wir eine Summe von Kernen, von denen wir einzeln zeigen, daß sie jeweils wieder zulässig sind.

$$\begin{aligned}
X\mathcal{A}_\lambda &= X((-\rho)^\delta (-r)^\gamma \mathrm{P}^{-t_0} v^{t_1} \bar{v}^{t_2} v^{*t_3} \bar{v}^{*t_4} E_m) \\
&= \quad \delta\,(X\rho)\ (-\rho)^{\delta-1} (-r)^\gamma \mathrm{P}^{-t_0} v^{t_1} \bar{v}^{t_2} v^{*t_3} \bar{v}^{*t_4} E_m && \text{(A)} \\
&\quad + \gamma\,(Xr)\ (-\rho)^{\delta} (-r)^{\gamma-1} \mathrm{P}^{-t_0} v^{t_1} \bar{v}^{t_2} v^{*t_3} \bar{v}^{*t_4} E_m && \text{(B)} \\
&\quad + t_1\,(Xv)\ (-\rho)^{\delta} (-r)^{\gamma} \mathrm{P}^{-t_0} v^{t_1-1} \bar{v}^{t_2} v^{*t_3} \bar{v}^{*t_4} E_m && \text{(C)} \\
&\quad + t_2\,(X\bar{v})\ (-\rho)^{\delta} (-r)^{\gamma} \mathrm{P}^{-t_0} v^{t_1} \bar{v}^{t_2-1} v^{*t_3} \bar{v}^{*t_4} E_m && \text{(D)} \\
&\quad + t_3\,(Xv^*)\ (-\rho)^{\delta} (-r)^{\gamma} \mathrm{P}^{-t_0} v^{t_1} \bar{v}^{t_2} v^{*t_3-1} \bar{v}^{*t_4} E_m && \text{(E)} \\
&\quad + t_4\,(X\bar{v}^*)\ (-\rho)^{\delta} (-r)^{\gamma} \mathrm{P}^{-t_0} v^{t_1} \bar{v}^{t_2} v^{*t_3} \bar{v}^{*t_4-1} E_m && \text{(F)} \\
&\quad + (-t_0)\,(X\mathrm{P})\ (-\rho)^{\delta} (-r)^{\gamma} \mathrm{P}^{-t_0-1} v^{t_1} \bar{v}^{t_2} v^{*t_3} \bar{v}^{*t_4} E_m && \text{(G)} \\
&\quad + \ (XE_m)\ (-\rho)^{\delta} (-r)^{\gamma} \mathrm{P}^{-t_0} v^{t_1} \bar{v}^{t_2} v^{*t_3} \bar{v}^{*t_4}. && \text{(H)}
\end{aligned}$$

Da v, $\bar{v}$, v^* und $\bar{v}^*$ ebenso wie ρ und r glatte Funktionen bis zum Rand sind, gilt

$$Xv = \mathcal{E}_0, \quad X\bar{v} = \mathcal{E}_0, \quad Xv^* = \mathcal{E}_0, \quad X\bar{v}^* = \mathcal{E}_0 \quad Xr = \mathcal{E}_0 \quad X\rho = \mathcal{E}_0.$$

Somit sind die Terme (C) bis (F) wiederum zulässige Kerne, und wenn wir ihren Typ prüfen, stellen wir fest, daß dieser stets mindestens $\lambda - 2$ ist.

Von (A) und (B) ist höchstens ein Term ungleich 0, je nachdem ob X in z oder ζ wirkt. Dieser Summand ist zulässig, wenn die Voraussetzungen des Satzes gelten, denn dann ist gesichert, daß die Exponenten von $(-\rho)$ und $(-r)$ nichtnegativ bleiben.

Im Term (H) wird der isotrope Anteil E_m differenziert. Für einen solchen ist bekannt, daß

$$\begin{aligned} XE_m &= \mathcal{E}_{m-1} \quad \text{für } m \geq 1, \\ XE_0 &= \mathcal{E}_0. \end{aligned}$$

Damit ist auch der Term (H) zulässig, und wir können seinen Typ als mindestens $\lambda - 1$ identifizieren.

Aus der Definition von P folgt, daß

$$\begin{aligned} X\mathrm{P} &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0\rho, \qquad && \text{falls } X \text{ in } z \text{ wirkt}, \\ X\mathrm{P} &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 r, \qquad && \text{falls } X \text{ in } \zeta \text{ wirkt}. \end{aligned}$$

Somit ist (G) ebenfalls wieder zulässig und mindestens vom Typ $\lambda - 1$.

Damit ist der Beweis des Lemmas vollständig.

Wir können nun genauer die regularisierende Wirkung von Operatoren von hohem Typ beschreiben:

Lemma 71. *Es sei $\lambda > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Es sei A ein zulässiger Operator vom Typ $2k + \lambda$, $k \in \mathbb{N}$, wobei in den Darstellungen (41) von A der Exponent von r ganzzahlig ist. Dann bildet A den Raum L^∞ nach $C^k(\overline{D})$ ab.*

Beweis. Wir haben gezeigt, daß alle partiellen Ableitungen eines zulässigen Kernes $\mathcal{A}_\mu$ mit ganzzahligem Exponent für r wiederum zulässig sind, wobei der Typ um höchstens zwei geringer ist. In Vektorfeldschreibweise lautet dies

$$XA_\mu f = A_{\mu-2} f$$

für jedes $f \in L^\infty$, wobei X ein Vektorfeld mit glatten Koeffizienten ist, das in z wirkt. Solange der Typ positiv bleibt, wissen wir, daß $A_{\mu-2}f$ stetig ist. Für beliebige glatte Vektorfelder X^i, $i = 1, \ldots, k$, die in z wirken, gilt also

$$X^1 \ldots X^k A_{\lambda+2k} f(z) = \int\limits_D (X^1 \ldots X^k A_{\lambda+2k} A_\lambda) f(\zeta)\, dl(\zeta) = \int\limits_D A_\lambda f(\zeta)\, dl(\zeta),$$

und damit bildet $X^1 \ldots X^k A_{\lambda+2k}$ für beliebige X^i den Raum L^∞ nach $C^0(\overline{D})$ ab, $A_{\lambda+2k}f$ ist demnach in $C^k(\overline{D})$.

Ein etwas besseres Ergebnis erhalten wir, wenn wir einbeziehen, daß $\mathcal{A}$ in der Nähe des Randes ein anisotropes Verhalten zeigt. Dazu unterteilen wir zunächst die auftretenden Vektorfelder in verschiedene Klasse, angelehnt an [LiM 02], Kapitel I, §8.

Definition 72. Es sei $z_0 \in bD$. Dann gibt es $n-1$ Vektorfelder $(L_i)_{i=1\dots n-1}$ in einer Umgebung $U = U(z_0)$, die von der Form

$$L_i(z) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \qquad \text{für } i = 1, \dots, n-1$$

mit glatten Koeffizientenfunktionen a_{ij} sind, so daß diese in $U \cap bD$ den Raum der holomorph tangentialen Vektorfelder an bD aufspannen. Wenn wir diese um das nicht-tangentiale Vektorfeld

$$L_n(z) := \frac{1}{|\partial r|^2} \sum_{j=1}^{n} r_{\bar{j}} \frac{\partial}{\partial z_j}$$

ergänzen, wird durch $L_1, \dots, L_n$ der gesamte Raum der holomorphen Vektorfelder in der Umgebung U aufgespannt. Die Koeffizienten a_{ij} können wir dabei so wählen, daß in U

$$L_j\, r \equiv \begin{cases} 0 & \text{für } j = 1, \dots, n-1, \\ 1 & \text{für } j = n. \end{cases}$$

gilt.

Definition 73. Zu den holomorphen Vektorfeldern definieren wir ebenfalls auf U die zugehörigen antiholomorphen Vektorfelder als

$$\bar{L}_j := \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \qquad \text{für } i = 1, \dots, n-1,$$

$$\bar{L}_n := \frac{1}{|\partial r|^2} \sum_{j=1}^{n} r_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}.$$

Wir setzen

$$N := \frac{1}{2}(L_n + \bar{L}_n) \qquad \text{und} \qquad Y := \frac{1}{2}(L_n - \bar{L}_n),$$

so daß $Yr \equiv 0$ und $Nr \equiv 1$ gilt, und erhalten mit

$$(L_1, \dots, L_{n-1}, \bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{n-1}, Y, N)$$

eine Basis für den Raum aller Vektorfelder in U. Dabei ist N die reelle Normalenrichtung, Y ist reell tangential auf bD, aber weder holomorph noch antiholomorph tangential.

Der Ausdruck der *Tangentialität* eines Vektorfelds ist zunächst nur in Randpunkten des Gebiets definiert. Es ist aber zweckmäßig, dies auf beliebige glatte Vektorfelder zu übertragen:

Definition 74. Es sei X ein Vektorfeld auf $\overline{D}$. Dann nennen wir X *rein tangential*, wenn es eine Umgebung $U = U(bD) \cap \overline{D}$ gibt, so daß $Xr|_U \equiv 0$.

Die Felder L_1 bis L_{n-1}, $\bar{L}_1$ bis $\bar{L}_{n-1}$ und Y sind also rein tangential. In vielen Fällen ist diese strenge Charakterisierung jedoch nicht notwendig. Wir führen daher einen weiteren, schwächeren Begriff ein:

Definition 75. Es sei X ein Vektorfeld auf $\overline{D}$. Dann nennen wir X *tangential*, wenn $Xr|_{bD} \equiv 0$. Falls X tangential ist und wir $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ schreiben können, nennen wir X *holomorph tangential*. Analog dazu, falls $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$ gilt, nennen wir X *antiholomorph tangential*.

Bemerkung. Wenn X glatte Koeffizienten hat, ist es gleichbedeutend, ob wir $Xr|_{bD} = 0$ oder $Xr = \mathcal{E}_0 r$ fordern. Da wir nur glatte Vektorfelder betrachten werden, verwenden wir im folgenden meist die zweite Charakterisierung.

Da der Rand von D kompakt ist, wird er durch endlich viele Umgebungen überdeckt, in welchen wir jeweils derartige Basen definieren können. Wir wählen eine solche Überdeckung fest für alle weiteren Betrachtungen und gewinnen so eine Standardzerlegung eines beliebigen glatten Vektorfeldes in lokale Darstellungen:

Definition 76. Es sei X ein Vektorfeld mit glatten Koeffizienten auf $\overline{D}$. Dann gibt es in der Nähe jedes Randpunktes eine Zerlegung

$$X = a(z)N + b(z)Y + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(z)L_j + \sum_{i=1}^{n-1} d_j(z)\bar{L}_j.$$

Wir bezeichnen den Summand $a(z)N$ als *normalen* oder *nicht-tangentialen Anteil*[4] des Vektorfelds, die restlichen Summanden als *tangentialen Anteil*[5]. Diesen unterteilen wir weiter in den *nur reell tangentialen Anteil* $b(z)Y$ und den *komplex tangentialen* Rest, welchen wir wiederum zerlegen in den *holomorph tangentialen Anteil* $W := \sum_{j=1}^{n-1} c_j(z)L_j$ und den *antiholomorph tangentialen Anteil* $W' := \sum_{i=1}^{n-1} d_j(z)\bar{L}_j$.

Die analoge Konstruktion und Definition treffen wir für Vektorfelder, die in ζ wirken.

Wir betrachten nun die Wirkung von holomorph bzw. antiholomorph tangentialen Vektorfeldern auf zulässige Kerne:

Satz 77. *Es sei $\mathcal{A}_\lambda(\zeta, z)$ ein zulässiger Kern. Dann gilt*

$$T\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}_{\lambda-2}$$

für jedes tangentiale Vektorfeld T und sogar

$$W\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}_{\lambda-1},$$

falls W ein holomorph oder antiholomorph tangentiales Vektorfeld ist.

[4] Streng genommen ist dies nicht die richtige Bezeichnung, denn wenn $a(z)$ in allen Randpunkten verschwindet, ist auch $a(z)N$ nach unserer Terminologie ein tangentiales Vektorfeld.

[5] Dieser Anteil müßte entsprechend „rein tangentialer Anteil" heißen.

Beweis. Der einzige Unterschied der ersten Aussage zu Lemma 70 ist, daß wir keine Voraussetzungen an die Exponenten von ρ oder r stellen müssen. Der Beweis ist eine Kopie des dortigen, wobei die zusätzlich enstehenden Faktoren $\mathcal{E}_0\rho$ bzw. $\mathcal{E}_0 r$, wenn T auf ρ bzw. r fällt, dafür sorgen, daß die Potenzen von r und ρ nicht erniedrigt werden und somit sicherlich alle auftretenden Kerne zulässig sind.

Für den Beweis der zweiten Aussage wissen wir damit schon, daß WA_λ zulässig ist. Wir müssen nur noch die Summanden (A) bis (H) auf ihren Typ überprüfen. (A) und (B) sind für tangentiale Felder höchstens vom Typ λ, (G) und (H) sind ohnehin für jedes Vektorfeld vom Typ $\lambda - 1$. Es bleibt zu zeigen, daß (C) bis (F) den Typ $\lambda - 1$ haben. Das ergibt sich aus dem folgenden Lemma:

Lemma 78. *W sei ein holomorph oder antiholomorph tangentiales Vektorfeld. Dann gilt*

$$Wv = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 r, \qquad W\bar{v} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 r, \qquad Wv^* = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 r, \qquad W\bar{v}^* = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 \rho.$$

Beweis. Wir beweisen dies für ein holomorph tangentiales W, das in z wirkt. Die anderen Fälle ergeben sich dann durch komplexe Konjugation bzw. mit Hilfe der Tatsache, daß $\bar{v}^*(\zeta, z) = v(z,\zeta) + \mathcal{E}_3$ gilt.

Es sei also $W = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ mit $Wr = \mathcal{E}_0 r$. Dann gilt

$$W\bar{v} = 0 \qquad \text{und} \qquad W\bar{v}^* = \mathcal{E}_2,$$

denn $\bar{v}$ ist ein Polynom in $\bar{z}$, und bekanntlich gilt $\bar{v}^* = \bar{v} + \mathcal{E}_3$. Eine direkte Rechnung ergibt nun

$$\begin{aligned} Wv^* &= W\left(-r - \sum_j r_{\bar{j}}(\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j) - \frac{1}{2}\sum_{j,k} r_{\bar{j}\bar{k}}(\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j)(\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k)\right) \\ &= \mathcal{E}_0 r + \sum_{ij} a_i r_{i\bar{j}}(\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j) - \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} a_i \bar{r}_{i\bar{j}\bar{k}}(\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j)(\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k) \\ &= \mathcal{E}_0 r + \mathcal{E}_1, \end{aligned}$$

und $Wv = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 r$ folgt wiederum mittels $v^* = v + \mathcal{E}_3$.

4.1 Eine Kommutatorrelation

Die bisherigen Abschätzungen unterscheiden nicht, ob ein zulässiger Operator A auf L^∞ oder auf einem Raum höhererer Regularität wirkt, wie z. B. $C^k(\overline{D})$ oder sogar $C^\infty(\overline{D})$. Unser nächstes Ziel ist es, Ableitungen von Af statt durch Ableitungen des Kernes durch Ableitungen von f auszudrücken. Auf diese Weise könnten wir durch Iteration Abschätzungen in $C^k(\overline{D})$- bzw. $C^\infty(\overline{D})$-Norm für beliebige Kerne von positivem Typ gewinnen. Wir suchen dabei zunächst eine Formel der Form:

$$XA_\lambda f = A'_\lambda \tilde{X} f + A''_\lambda f, \tag{79}$$

wobei $\tilde{X}$ ein glattes Vektorfeld ist und A'_λ und A''_λ wiederum zulässige Operatoren sind. Diese können von A_λ und X abhängen, unter Umständen auch von f.

Es ist jedoch leicht einzusehen, daß diese Aufgabe in solcher Allgemeinheit scheitern wird:

Lemma 80. *Es gibt zulässige Operatoren von beliebig hohem Typ, die selbst glatte Funktionen nicht in Räume höherer Regularität als $C^0(\overline{D})$ abbilden.*

Beweis. Wir betrachten für $0 < \varepsilon < 1$ und $\delta \geq 0$ Kerne $\mathcal{K}(\zeta, z) = (-\rho)^\delta(-r)^\varepsilon$. Offensichtlich sind diese zulässig, und je nach Wahl von ε und δ ist ein beliebig hoher Typ möglich, der auch ganzzahlig sein kann. Aber für $f \in C^\infty(\overline{D})$ ist

$$\int_D \mathcal{K}(\zeta, z) f(\zeta)\, dl(\zeta) = C(-r)^\varepsilon, \tag{81}$$

also bis zum Rand stetig, aber dort nicht differenzierbar.[6]

Bemerkung. Wie man dem Gegenbeispiel ebenfalls ansieht, ist es die Ableitung in nichttangentialer Richtung, die dort nicht existiert bzw. nicht bis zum Rand stetig ist. Tangentiale Vektorfelder können wir dagegen beliebig viele auf die rechte Seite von (81) anwenden, ohne die Klasse $C^0(\overline{D})$ zu verlassen. In der Tat wird es ein Ergebnis sein, daß für tangentiale Ableitungen tatsächlich stets eine zu (79) ähnliche Kommutatorrelation besteht.

Bevor wir uns aber diesem Problem widmen, zeigen wir jedoch exemplarisch, daß auch für Kerne von niedrigem Typ allgemeine $C^k(\overline{D})$-Abschätzungen sehr wohl möglich sind, wenn wir uns auf eine einfache Unterklasse von zulässigen Kernen beschränken. Wir folgen dabei etwas vereinfacht Lemma VII 7.19 von Range in [Ran 86]:

Lemma 82. *Es sei $\mathcal{A}_\lambda(\zeta, z)$ ein zulässiger Kern vom Typ $\lambda > 0$ mit der Struktur*

$$\mathcal{A}_\lambda(\zeta, z) = \frac{E_0}{v^j},$$

wobei $j \geq 2$. Dann bildet der zugehörige Operator für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ den Raum $C^k(\overline{D})$ nach $C^k(\overline{D})$ ab.

Beweis. Der Beweis beruht darauf, daß wir $\mathcal{A}_\lambda$ als tangentiale Ableitung eines Kernes von höherem Typ schreiben können: Es ist nämlich für $\tilde{Y} := \sum \rho_{\bar{\imath}} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} - \rho_i \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_i}$

$$\mathcal{A}_\lambda(\zeta, z) = \frac{1}{j-1}\left[-\tilde{Y}\left(\frac{E_0}{v^{j-1}(\tilde{Y}v)}\right) + \frac{\tilde{Y}E_0}{v^{j-1}(\tilde{Y}v)} - \frac{E_0(\tilde{Y}\tilde{Y}v)}{v^{j-1}(\tilde{Y}v)^2}\right],$$

und da $\tilde{Y}v$ in der Nähe des Randes keine Nullstelle hat, können wir dies schreiben als

$$= \tilde{Y}\mathcal{A}'_{\lambda+2} + \mathcal{A}''_{\lambda+2},$$

[6] In gewisser Weise ist dies der Preis, den wir dafür zahlen, nicht ganzzahlige Potenzen der Randfunktion in zulässigen Kernen zuzulassen. Dadurch sind unsere zulässigen Kerne selbst nicht mehr von der Klasse $C^\infty(\overline{D} \times \overline{D} \setminus \Lambda)$, sondern nur $C^0(\overline{D} \times \overline{D} \setminus \Lambda) \cap C^\infty(D \times D)$. Für Kerne von hohem Typ mit ganzzahligen Exponenten von $(-r)$ und $(-\rho)$ steht uns dagegen immer Lemma 71 zur Verfügung, und eine Situation wie im Gegenbeispiel ist nicht möglich.

denn $\dfrac{E_0}{\tilde{Y}v} = \mathcal{E}_0$, etc.

Damit gilt aber

$$
\begin{aligned}
A_\lambda f(z) &= \int_D \mathcal{A}_\lambda(\zeta, z)\, f(\zeta)\, dl(\zeta) \\
&= \int_D (\tilde{Y}\mathcal{A}'_{\lambda+2}(\zeta, z))\, f(\zeta)\, dl(\zeta) + \int_D \mathcal{A}''_{\lambda+2}(\zeta, z)\, f(\zeta)\, dl(\zeta).
\end{aligned}
$$

Da $\tilde{Y}$ tangential ist, können wir partiell integrieren und erhalten

$$
\begin{aligned}
&= -\int_D \mathcal{A}'_{\lambda+2}(\zeta, z)\, (\tilde{Y} f(\zeta))\, dl(\zeta) + \int_D f(\zeta)\, \mathcal{A}''_{\lambda+2}(\zeta, z)\, dl(\zeta) \\
&= -A'_{\lambda+2}\, \tilde{Y} f + A''_{\lambda+2} f.
\end{aligned}
$$

Nach Lemma 70 können wir nun ein beliebiges Vektorfeld X auf $A_\lambda f$ anwenden und erhalten durch Differenzieren der Kerne auf der rechten Seite

$$
X A_\lambda f = A'_\lambda \tilde{Y} f + A''_\lambda f.
$$

Dies ist stetig, falls $\tilde{Y} f \in C^0(\overline{D})$ und $f \in C^0(\overline{D})$, also insbesondere für $f \in C^1(\overline{D})$.

Damit bildet A_λ zumindest $C^1(\overline{D})$ nach $C^1(\overline{D})$ ab. Beim Differenzieren der entstehenden Kerne wird der Typ nur wieder erniedrigt, wenn die Differentiation auf v im Nenner fällt, wodurch dessen Exponent wieder auf j erhöht wird. Damit ist gesichert, daß auch die abgeleiteten Kerne wiederum der Voraussetzung $j \geq 2$ genügen, so daß wir die Konstruktion iterieren können. Auf diese Weise erhalten wir das Ergebnis für beliebige $C^k(\overline{D})$.

Bemerkung. Wesentlich beim Beweis des Satzes ist, daß die Nenner der auftretenden Kerne nur Potenzen eines einzigen anisotropen Faktors, hier v, besitzt. Die Kerne besitzen daher keine „gemischte Singularität“ wie sie bei einem Produkt der Form $v^j \bar{v}^k$ im Nenner auftreten würde. Mit Weiterentwicklungen der hier gezeigten Methode haben Lieb und Michel in [LiM 02] eine umfangreiche Theorie für wesentlich komplexere Kerne mit Ergebnissen analog zu Lemma 82 entwickelt. Die dort behandelten Kerne dürfen jedoch ebenfalls keine gemischten Singularitäten besitzen.

4.2 Tangentiale Regularität

Aus den bisherigen Betrachtungen lassen sich zwei Schlüsse ziehen: Um $C^k(\overline{D})$-Abschätzungen für Kerne von niedrigem Typ zu zeigen, muß es uns gelingen, die Differentiation vom Kern des Operators auf sein Argument zu übertragen. Das kann z. B. durch eine Form partieller Integration gelingen. Für nicht-tangentiale Vektorfelder haben wir dabei aufgrund von Lemma 80 im allgemeinen keine Aussicht auf Erfolg. Unser Ziel ist daher das folgende Ergebnis, das wir später in diesem Abschnitt als Theorem 87 formulieren und beweisen werden:

Theorem. Es sei A_λ ein zulässiger Operator vom Typ $\lambda > 0$ und T ein tangentiales Vektorfeld. Dann gilt für $f \in C^1(\overline{D})$

$$TA_\lambda f = A_\lambda \tilde{T} f + \sum_i A^{(i)}_{\lambda+1} X^{(i)} f + \tilde{A}_\lambda f.$$

Dabei sind $A^{(i)}_\lambda$ und $\tilde{A}_\lambda$ wiederum zulässige Operatoren und $X^{(i)}$ glatte Vektorfelder, die jedoch nicht notwendig tangential sein müssen.

Bis wir dieses Resultat zeigen können, benötigen wir zahlreiche explizite Rechnungen mit den Darstellungen zulässiger Kerne. Wie üblich können wir dabei mittels einer Partition der Eins stets zu einer Funktion f mit Träger in einer beliebig kleinen Teilmenge von $\overline{D}$ übergehen. Für Funktionen, deren Träger dabei kompakt in D ist, ist beliebig gute Regularität gegenüber tangentialen Ableitungen leicht zu zeigen:

Satz 83. *Es sei A_λ ein zulässiger Operator, $f \in L^\infty(D)$ mit* $\operatorname{supp} f \subset\subset D$ *und für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ seien tangentiale Vektorfelder $T_1, \ldots, T_k$ gegeben. Dann ist $T_1 \ldots T_k A_\lambda f \in C^0(\overline{D})$.*

Beweis. Da $c \leq -\rho \leq C$ mit Konstanten $c, C > 0$ auf $\operatorname{supp} f$, ist $\hat{f} := f(-\rho)^{-N}$ für alle $N \in \mathbb{N}$ wiederum in $L^\infty(D)$. Wir wählen N groß genug, daß $\hat{\mathcal{A}} := (-\rho)^N \mathcal{A}_\lambda$ Typ größer als $2k$ hat. Es ist natürlich $A_\lambda f = \hat{A} \hat{f}$ und die Behauptung gilt, weil $T_1 \ldots T_k \hat{\mathcal{A}}$ nach Satz 77 noch vom Typ > 0 ist, also $L^\infty(D)$ nach $C^0(\overline{D})$ abbildet.

Bemerkung. Analog zeigt man, daß sogar $A_\lambda f \in C^k(\overline{D})$ für beliebiges k, falls $\operatorname{supp} f \subset\subset D$ und $\mathcal{A}_\lambda$ keine oder nur eine ganzzahlige Potenz von r enthält. Wir benötigen diese Aussage jedoch im weiteren nicht.

Nachdem dieser Fall geklärt ist, werden wir den Rest dieses Abschnittes durchgehend nur in einer Umgebung U eines fest gewählten Randpunktes z_0 arbeiten. Diese Umgebung sei so klein gewählt, daß wir für $\mathcal{A}_\lambda$ eine lokale Darstellung wie (41) haben und alle Vektorfelder nach Definition 76 in eine Linearkombination der Basisfelder aus Definition 72 zerlegt werden können.

Als Konvention sei X stets ein beliebiges glattes Vektorfeld, das in z wirkt, $\tilde{X}$ das gleiche Vektorfeld für die Variable ζ. Vektorfelder T und $\tilde{T}$ seien entsprechend bezeichnete tangentiale Vektorfelder (d.h. $Tr = \mathcal{E}_0 r$, $\tilde{T}\rho = \mathcal{E}_0 \rho$) und W bzw. $\tilde{W}$ holomorph tangentiale Vektorfelder.

Wir beginnen mit einem technischen Lemma über die simultane Anwendung eines Vektorfeldes in beiden Variablen:

Lemma 84.

i) $(X + \tilde{X})E_m = \mathcal{E}_m$,

ii) $(T + \tilde{T})v = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 \rho$,
$(T + \tilde{T})v = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 r$,

iii) $(X+\tilde{X})(F+\bar{F}^*) = \mathcal{E}_2$,

iv) $(T+\tilde{T})(v+\bar{v}) = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_0\rho + \mathcal{E}_0 r$,

v) $(X+\tilde{X})\mathrm{P} = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_0\rho + \mathcal{E}_0 r$.

Aussage ii) gilt auch für $\bar{v}$, v^* und $\bar{v}^*$, Aussage iii) auch für $(\bar{F}+F^*)$.

Beweis.

i) folgt aus einer Taylor-Entwicklung von E_m und der Tatsache, daß $\frac{\partial}{\partial \zeta_i}\eta = -\frac{\partial}{\partial z_i}\eta$.

ii) folgt aus *i)*, denn nach Definition gilt $v = -\rho + \mathcal{E}_1$ und nach Voraussetzung ist $\tilde{T}\rho = \mathcal{E}_0\rho$. Das gleiche Argument funktioniert für $\bar{v}$, v^* und $\bar{v}^*$. Für die zweite Aussage verwenden wir, daß $\rho = r + \mathcal{E}_1$ gilt in U.

iii) Wir entnehmen der Definition, daß $F = \sum_i \rho_i\eta_i + \mathcal{E}_2$ und $\bar{F}^* = -\sum_i r_i\eta_i + \mathcal{E}_2$, also

$$F + \bar{F}^* = \sum_i (\rho_i - r_i)\eta_i + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2.$$

Damit folgt die Behauptung nach Teil i).

iv) folgt aus *iii)*, denn $v = -\rho + F$ und $\bar{v} = \bar{v}^* + \mathcal{E}_3 = -r + \bar{F}^* + \mathcal{E}_3$.

v) folgt analog, denn $\mathrm{P} = \mathcal{E}_2 + 2r\rho$.

Die folgenden zwei Sätze demonstrieren, was passiert, wenn bei einem zulässigen Kern Exponenten verschoben bzw. in Zähler und Nenner simultan erhöht bzw. erniedrigt werden.

Satz 85. *Es sei $\mathcal{A}_\lambda = \dfrac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l}}$ zulässig. Dann gilt*

i) $$\frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1} E_m}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^k v^{*i+1} \bar{v}^{*l}} = \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1} E_m}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j+1} \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l}} + \mathcal{A}_{\lambda+1},$$

ii) $$\frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1} E_m}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l+1}} = \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1} E_m}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^{k+1} v^{*i} \bar{v}^{*l}} + \mathcal{A}_{\lambda+1}.$$

Beweis. Der Beweis beruht wiederum auf der Beziehung $v = v^* + \mathcal{E}_3$. Wir prüfen

$$\frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^k v^{*i+1} \bar{v}^{*l}} = \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m v}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j+1} \bar{v}^k v^{*i+1} \bar{v}^{*l}} = \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m (v^* + \mathcal{E}_3)}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j+1} \bar{v}^k v^{*i+1} \bar{v}^{*l}} = \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j+1} \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l}} + \mathcal{A}_{\lambda+1},$$

und die zweite Gleichung geht aus der ersten durch komplexe Konjugation hervor.

Satz 86. *Es sei A_λ ein zulässiger Operator mit Kern $\mathcal{A} = \dfrac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l}}$. Dann gibt es zulässige Operatoren $A_{\lambda+1}$ und $A_{\lambda+2}$, so daß für alle $f \in C^1(\overline{D})$*

$$i) \int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m f dl}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l}} = \frac{-j-i}{\delta+1} \int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1} E_m f dl}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j+1} \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l}} + A_{\lambda+1} f + A_{\lambda+2} \bar{\partial} f,$$

$$ii) \int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m f dl}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l}} = \frac{-k-l}{\delta+1} \int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1} E_m f dl}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^{k+1} v^{*i} \bar{v}^{*l}} + A_{\lambda+1} f + A_{\lambda+2} \partial f.$$

gilt. Die analogen Aussagen, bei denen die Exponenten von v^* bzw. $\bar{v}^*$ erhöht werden, gelten ebenfalls.

Beweis. Der Beweis besteht aus partieller Integration, wobei wir sorgfältig alle auftretenden Terme klassifizieren müssen. Zunächst sei E'_m durch die Relation

$$E'_m \partial\bar{v} \wedge \bar{\partial} v \wedge \beta^{n-1} := E_m dl$$

gegeben. E'_m ist wiederum vom Typ $\mathcal{E}_m$, da $\partial\bar{v} \wedge \bar{\partial} v$ in der Nähe der Randdiagonalen keine Nullstellen hat.

Wir setzen dies ein und erhalten für $f \in C^1(\overline{D})$:

$$\begin{aligned} A_\lambda f &= \int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m f \beta^n}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l}} \\ &= \int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E'_m f \partial\bar{v} \wedge \bar{\partial} v \wedge \beta^{n-1}}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l}}. \end{aligned}$$

Wir ersetzen $\bar{\partial} v$ durch $-\bar{\partial}\rho$, wobei wegen $\bar{\partial}(v+\rho) = \mathcal{E}_1$ ein Fehlerterm entsteht, der um 1 höheren Typ hat als $\mathcal{A}_\lambda$ selbst. Aus Gradgründen können wir im Zähler des Bruchs auch $d\rho$ statt $\bar{\partial}\rho$ schreiben und erhalten

$$= -\int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E'_m f \partial\bar{v} \wedge d\rho \wedge \beta^{n-1}}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l}} + A_{\lambda+1} f.$$

Nun integrieren wir partiell. Da $\delta + 1 > 0$ ist, bewirkt der Faktor $(-\rho)^{\delta+1}$, daß kein Randintegral auftritt:

$$\begin{aligned} =&\frac{-j}{\delta+1} \int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1} E'_m f \partial\bar{v} \wedge \bar{\partial} v \wedge \beta^{n-1}}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j+1} \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l}} + \frac{-k}{\delta+1} \int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1} E'_m f \partial\bar{v} \wedge \bar{\partial} \bar{v} \wedge \beta^{n-1}}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^{k+1} v^{*i} \bar{v}^{*l}} \\ &+ \frac{-i}{\delta+1} \int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1} E'_m f \partial\bar{v} \wedge \bar{\partial} v^* \wedge \beta^{n-1}}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^k v^{*i+1} \bar{v}^{*l}} + \frac{-l}{\delta+1} \int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1} E'_m f \partial\bar{v} \wedge \bar{\partial} \bar{v}^* \wedge \beta^{n-1}}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l+1}} \\ &+ \frac{-t_0}{\delta+1} \int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1} E'_m f \partial\bar{v} \wedge \bar{\partial} P \wedge \beta^{n-1}}{\mathrm{P}^{t_0+1} v^j \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l}} + \frac{1}{\delta+1} \int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1} f \partial\bar{v} \wedge \bar{\partial} E'_m \wedge \beta^{n-1}}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l}} \\ &+ \frac{1}{\delta+1} \int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1} E'_m \partial\bar{v} \wedge \bar{\partial} f \wedge \beta^{n-1}}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l}} + A_{\lambda+1} f. \end{aligned}$$

Viele dieser Terme sind offensichtlich von höherem Typ, und wir können sie mit dem Fehlerterm $\mathcal{A}_{\lambda+1} f$ zusammenfassen. Zudem verwenden wir, daß $\bar{\partial} v^* = \bar{\partial} v + \mathcal{E}_2$ und setzen, wo möglich, wieder E_m statt E'_m ein. Übrig bleiben drei Integrale

$$\begin{aligned} =&\frac{-j}{\delta+1} \int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1} E_m f dl}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j+1} \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l}} + \frac{-i}{\delta+1} \int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1} E_m f dl}{\mathrm{P}^{t_0} v^j \bar{v}^k v^{*i+1} \bar{v}^{*l}} \\ &+ \frac{-t_0}{\delta+1} \int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1} E'_m f \partial\bar{v} \wedge \bar{\partial} P \wedge \beta^{n-1}}{\mathrm{P}^{t_0+1} v^j \bar{v}^k v^{*i} \bar{v}^{*l}} + A_{\lambda+1} f + A_{\lambda+2} \bar{\partial} f. \end{aligned}$$

Der dritte Kern ist allerdings ebenfalls vom Typ $\lambda+1$, denn $\bar\partial \mathrm{P} = \bar\partial R^2 + r\bar\partial\rho = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 r$. Auf das zweite Integral wenden wir Satz 85 an und erhalten

$$= \frac{-j}{\delta+1}\int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1}E_m f\,dl}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j+1}\overline{v}^k v^{*i}\overline{v}^{*l}} + \frac{-i}{\delta+1}\int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^{\delta+1}E_m f\,dl}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j+1}\overline{v}^k v^{*i}\overline{v}^{*l}} + A_{\lambda+1}f + A_{\lambda+2}\bar\partial f.$$

Indem wir beide Terme zusammenfassen, folgt die Behauptung i). Die zweite Aussage folgt wiederum durch komplexe Konjugation aus der ersten. Die Aussagen für v^* und $\overline{v}^*$ ergeben sich aus i) bzw. ii) durch Anwendung von Satz 85.

Bemerkung. Genaugenommen ist derjenige Kern, der auf die Ableitung von f wirkt, nicht immer vom Typ $\lambda+2$. Vielmehr hat er die Form $(-\rho)\tilde{\mathcal{A}}_\lambda$, und falls die Singularität von $\mathcal{A}_\lambda$ zu gering war, kann dies nach Definition 42 nur vom Typ $\lambda+1$ sein, nämlich falls $t-\delta-1-\gamma<2$ gilt. Wir schreiben dennoch $\mathcal{A}_{\lambda+2}$, denn zum einen haben für Kerne im $\mathbb{C}^n$ mit $n\geq 2$ alle später explizit auftretenden Kerne eine ausreichend starke Singularität im Nenner, und zum anderen interessieren wir uns nur für die Ableitungen des Kerns, und $(-\rho)\tilde{\mathcal{A}}_\lambda$ verhält sich unter Differentiation gerade so als habe er Typ $\lambda+2$: Es ist nämlich

$$\begin{aligned} X(-\rho)\tilde{\mathcal{A}}_\lambda &= \mathcal{A}_\lambda, \\ W(-\rho)\tilde{\mathcal{A}}_\lambda &= \mathcal{A}_{\lambda+1}, \end{aligned}$$

wie man sieht, wenn man den ausdifferenzierten Kern mittels Definition 42 untersucht.

Mit diesen Hilfsmitteln können wir nun das zentrale Theorem beweisen.

Theorem 87. *Es sei A_λ ein zulässiger Operator vom Typ $\lambda>0$ und T ein tangentiales Vektorfeld. Dann gilt für $f\in C^1(\overline{D})$*

$$TA_\lambda f = A_\lambda\tilde{T}f + \sum_i A^{(i)}_{\lambda+1}X^{(i)}f + \tilde{A}_\lambda f.$$

Dabei sind $A^{(i)}_\lambda$ und $\tilde{A}_\lambda$ wiederum zulässige Operatoren und $X^{(i)}$ glatte Vektorfelder, die jedoch nicht notwendig tangential sein müssen.

Beweis. Wir betrachten zunächst die Wirkung von $(T+\tilde{T})$ auf den Kern $\mathcal{A}_\lambda$:

$$\begin{aligned} (T+\tilde{T})\frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m}{\mathrm{P}^{t_0} v^j\overline{v}^k v^{*i}\overline{v}^{*l}} = \\ & - \delta\frac{(-\rho)^{\delta-1}(-r)^\gamma E_m(T+\tilde{T})\rho}{\mathrm{P}^{t_0} v^j\overline{v}^k v^{*i}\overline{v}^{*l}} - \gamma\frac{(-\rho)^\delta(-r)^{\gamma-1}E_m(T+\tilde{T})r}{\mathrm{P}^{t_0} v^j\overline{v}^k v^{*i}\overline{v}^{*l}} \\ & + \frac{(-\rho)^\delta(-r)^\gamma(T+\tilde{T})E_m}{\mathrm{P}^{t_0} v^j\overline{v}^k v^{*i}\overline{v}^{*l}} - t_0\frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m(T+\tilde{T})\mathrm{P}}{\mathrm{P}^{t_0} v^j\overline{v}^k v^{*i}\overline{v}^{*l+1}} \\ & - j\frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m(T+\tilde{T})v}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j+1}\overline{v}^k v^{*i}\overline{v}^{*l}} - k\frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m(T+\tilde{T})\overline{v}}{\mathrm{P}^{t_0} v^j\overline{v}^{k+1} v^{*i}\overline{v}^{*l}} \\ & - i\frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m(T+\tilde{T})v^*}{\mathrm{P}^{t_0} v^j\overline{v}^k v^{*i+1}\overline{v}^{*l}} - l\frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m(T+\tilde{T})\overline{v}^*}{\mathrm{P}^{t_0} v^j\overline{v}^k v^{*i}\overline{v}^{*l+1}}. \end{aligned}$$

Die ersten vier Terme sind aufgrund von Lemma 84 und der Beziehungen $(T+\tilde{T})\rho = \mathcal{E}_0\rho$ und $(T+\tilde{T})r = \mathcal{E}_0 r$ jeweils zulässig vom Typ λ. In den anderen Termen verwenden wir zunächst, daß $v = -\rho + F + \mathcal{E}_2$ ist, also $(T+\tilde{T})v = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_0\rho + (T+\tilde{T})F$ sowie die analogen Aussagen für $\bar{v}$, v^* und $\bar{v}^*$ gelten:

$$\begin{aligned} &= -j\frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m(T+\tilde{T})F}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j+1}\bar{v}^k v^{*i}\bar{v}^{*l}} - k\frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m(T+\tilde{T})\bar{F}}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j}\bar{v}^{k+1} v^{*i}\bar{v}^{*l}} \\ &\quad - i\frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m(T+\tilde{T})F^*}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j}\bar{v}^k v^{*i+1}\bar{v}^{*l}} - l\frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m(T+\tilde{T})\bar{F}^*}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j}\bar{v}^k v^{*i}\bar{v}^{*l+1}} + \mathcal{A}_\lambda. \end{aligned}$$

In den Nennern können wir nun F^* durch F und $\bar{F}$ durch $\bar{F}^*$ ersetzen, wenn wir benutzen daß $F^* = F + \rho - r + \mathcal{E}_3$, alle Fehlerterme also wiederum mindestens vom Typ λ sind. Nun verwenden wir Satz 85, wobei wir die Ausdrücke $E_m(T+\tilde{T})F$ und $E_m(T+\tilde{T})\bar{F}^*$ als isotrope Anteile der Ordnung E_{m+1} behandeln und die auftretenden Fehlerterme wiederum mindestens vom Typ λ sind:

$$= (-j-i)\frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m(T+\tilde{T})F}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j+1}\bar{v}^k v^{*i}\bar{v}^{*l}} + (-k-l)\frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m(T+\tilde{T})\bar{F}^*}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j}\bar{v}^k v^{*i}\bar{v}^{*l+1}} + \mathcal{A}_\lambda.$$

Wir nennen die ersten beiden Summanden für den Moment $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ und betrachten die Wirkung der zugehörigen Operatoren B_1 und B_2 auf eine Form f:

$$B_1 f + B_2 f = -(j+i)\int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m(T+\tilde{T})F}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j+1}\bar{v}^k v^{*i}\bar{v}^{*l}} f dl - (k+l)\int \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta E_m(T+\tilde{T})\bar{F}^*}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j}\bar{v}^k v^{*i}\bar{v}^{*l+1}} f dl.$$

Die Integralkerne sind dabei nur vom Typ $\lambda - 1$. Wir wenden nun Satz 86 an, wobei wir Terme, die aus Ableitungen von f bestehen, mit df abkürzen.

$$\begin{aligned} &= \frac{(j+i)(k+l)}{\delta+1}\int \frac{(-\rho)^{\delta+1}(-r)^\gamma E_m(T+\tilde{T})F}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j+1}\bar{v}^k v^{*i}\bar{v}^{*l+1}} f dl \\ &\quad + \frac{(k+l)(j+i)}{\delta+1}\int \frac{(-\rho)^{\delta+1}(-r)^\gamma E_m(T+\tilde{T})\bar{F}^*}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j+1}\bar{v}^k v^{*i}\bar{v}^{*l+1}} f dl + A'_\lambda f + A'_{\lambda+1} df \\ &= \frac{(j+i)(k+l)}{\delta+1}\int \frac{(-\rho)^{\delta+1}(-r)^\gamma E_m(T+\tilde{T})(F+\bar{F}^*)}{\mathrm{P}^{t_0} v^{j+1}\bar{v}^k v^{*i}\bar{v}^{*l+1}} f dl + A'_\lambda f + A'_{\lambda+1} df \\ &= A'_\lambda f + A'_{\lambda+1} df \end{aligned}$$

nach Lemma 84 *iii*).

Insgesamt haben wir also

$$\int\limits_D (T+\tilde{T})\mathcal{A}_\lambda f dl = A'_\lambda f + A'_{\lambda+1} df.$$

gezeigt. Indem wir das Feld T aus dem Integral ziehen und bezüglich $\tilde{T}$ partiell integrieren, erhalten wir

$$T\int\limits_D \mathcal{A}_\lambda f dl = \int \mathcal{A}_\lambda \tilde{T} f dl + A'_\lambda f + A'_{\lambda+1} df.$$

Dies ist in unserer abgekürzten Notation gerade die Aussage des Theorems.

5 Ein Integralkern für den Neumannoperator

5.1 Berechnung aus dem kanonischen Lösungsoperator für $\bar{\partial}$

Wir kehren nun zu unserer ursprünglichen Fragestellung zurück: Integraloperatoren und -kerne zur Behandlung des $\bar{\partial}$-Neumannproblems zu finden. In [LiM 02] führen Lieb und Michel eine Methode vor, einen expliziten Kern für den Neumannoperator zu berechnen bzw. seinen Hauptteil zu identifizieren und eine asymptotische Entwicklung zu gewinnen. Eine Voraussetzung dafür ist, daß der Integralkern $\mathcal{K}(\zeta, z)$ des kanonischen Lösungsoperators $K = \bar{\partial}^* N$ zumindest annähernd bekannt ist.

Satz 88. *Es sei $\mathcal{K}(\zeta, z)$ der Integralkern des kanonischen Lösungsoperators $\mathbf{K} = \bar{\partial}^* \mathbf{N}$ und $T : L^2 \to L^2$ ein stetiger Operator, dessen Integralkern $\mathcal{T}(\zeta, z)$ die Eigenschaften*

$$\begin{array}{rl} i) & \partial_\zeta \mathcal{T}(\zeta, z) = \mathcal{K}(\zeta, z), \\ ii) & \partial_\zeta^* \mathcal{T}(\zeta, z) = \mathcal{K}^*(\zeta, z), \\ iii) & \mathcal{T}^*(\zeta, z) = \mathcal{T}(\zeta, z), \\ iv) & *_\zeta\, \mathcal{T}(\,.\,, z)|_{bD} = 0 \quad \text{und} \quad *_\zeta\, \partial_\zeta \mathcal{T}(\,.\,, z)\big|_{bD} = 0 \qquad \text{für jedes feste } z \in D \end{array}$$

hat. Dabei ist $\mathcal{T}^*$ der Kern des adjungierten Operatoren zu T, also gegeben durch $\mathcal{T}^*_{p,q}(\zeta, z) := (-1)^{p+q}\overline{\mathcal{T}_{p,q}(z, \zeta)}$, wenn $\mathcal{T}_{p,q}$ den Anteil von $\mathcal{T}$ vom Grad (p, q) in z beschreibt. Analog sei $\mathcal{K}^*$ der Kern von $\mathbf{K}^*$.

Dann stimmt T mit dem Neumannoperator $\mathbf{N}$ überein, $\mathcal{T}$ ist also dessen Kern.

Beweisskizze:

Wir müssen prüfen, daß mit $\mathcal{H}^{p,q} = \ker \Box \subset L^2_{p,q}$ und $f \in L^2_{p,q}$

$$\Box T f = \begin{cases} f & \text{falls } f \perp \mathcal{H} \\ 0 & \text{falls } f \in \mathcal{H} \end{cases}$$

bzw. gleichbedeutend

$$= f - \mathbf{P} f,$$

wobei $\mathbf{P}$ die Projektion der $(p, 0)$-Formen auf ihre holomorphen Anteile ist. In unserer Situation ist nämlich $\mathcal{H}^{p,q} = \{0\}$ für $q \geq 1$ und $\mathcal{H}^{p,0} = \ker \bar{\partial}$.

Da sowohl $\mathbf{N}$ als auch T stetige Operatoren sind, genügt es, die Identität auf einer dichten Teilmenge von L^2 zu zeigen. Üblicherweise wählt man hierzu $\operatorname{dom} \Box$.

Aus den Bedingungen $i)$ und $ii)$ erhalten wir für $f \in \operatorname{dom} \bar{\partial} \cap \operatorname{dom} \bar{\partial}^*$, daß

$$\begin{array}{rl} i) & \mathbf{K} f = (f, \overline{\mathcal{K}}) = (f, \bar{\partial}_\zeta \overline{\mathcal{T}}) = (\bar{\partial}^* f, \overline{\mathcal{T}}) = T \bar{\partial}^* f, \\ ii) & \mathbf{K}^* f = (f, \overline{\mathcal{K}^*}) = (f, \bar{\partial}_\zeta^* \overline{\mathcal{T}}) = (\bar{\partial} f, \overline{\mathcal{T}}) = T \bar{\partial} f. \end{array}$$

Die Homotopieformel für den kanonischen Lösungsoperator K läßt sich für $f \in \operatorname{dom} \Box$ schreiben als

$$\mathbf{K}^* \bar{\partial}^* f + \mathbf{K} \bar{\partial} f = f - \mathbf{P} f,$$

also unter Benutzung von *i)* und *ii)*

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad T\bar{\partial}\bar{\partial}^* f + T\bar{\partial}^* \bar{\partial} f &= f - \mathbf{P} f, \\ \Leftrightarrow \quad T \Box f &= f - \mathbf{P} f \end{aligned}$$

und durch Bilden des Adjungierten

$$\Box^* T^* f = f - \mathbf{P}^* f.$$

Nach Eigenschaft *iii)* ist T selbstadjungiert. Da $\Box$ und $\mathbf{P}$ dies ebenfalls sind, gilt auch

$$\Box T f = f - \mathbf{P} f.$$

Die Behauptung ist also für Formen in $\operatorname{dom} \Box$ gezeigt und damit für ganz L^2.

Allerdings ist im allgemeinen weder ein expliziter Kern $\mathcal{K}(\zeta, z)$ für den kanonischen Lösungsoperator $\mathbf{K}$ der Cauchy-Riemann-Gleichungen bekannt, noch ist zu erwarten, daß sich bei bekanntem $\mathcal{K}$ das System der Bedingungen *i)* bis *iv)* explizit nach $\mathcal{T}$ auflösen ließe. Es gibt jedoch in einigen Situation explizite Ausdrücke zumindest für den Hauptteil von $\mathbf{K}$ in einer asymptotischen Entwicklung [LiR 83], [ABO 98]. Mit Hilfe der Theorie zulässiger Kerne ist dann eine systematische Behandlung der auftretenden Fehlerterme möglich, so daß man zu einem hinreichenden Kriterium kommt:

Satz 89. *Es sei $\tilde{T} : L^2 \to L^2$ ein stetiger Operator, dessen Integralkern $\tilde{\mathcal{T}}(\zeta, z)$ die Eigenschaften*

$$\begin{aligned} &i) && \partial_\zeta \tilde{\mathcal{T}}(\zeta, z) = \mathcal{K}(\zeta, z) + \mathcal{Z}_2^a, \\ &ii) && \partial_\zeta^* \tilde{\mathcal{T}}(\zeta, z) = \mathcal{K}^*(\zeta, z) + \mathcal{Z}_2^a, \\ &iii) && \tilde{\mathcal{T}}^*(\zeta, z) = \tilde{\mathcal{T}}(\zeta, z) + \mathcal{Z}_3^a, \\ &iv) && *_\zeta \, \tilde{\mathcal{T}}(\,.\,, z)|_{bD} = 0 \quad \text{und} \quad *_\zeta \, \partial_\zeta \tilde{\mathcal{T}}(\,.\,, z)\Big|_{bD} = 0 \qquad \text{für jedes feste } z \in D \end{aligned}$$

hat, wobei $\mathcal{K}(\zeta, z)$ der Integralkern des kanonischen Lösungsoperators $\mathbf{K}$ ist und die $\mathcal{Z}^a$-Terme asymptotische Z-Operatoren nach Definition 67 induzieren. Dann ist $\tilde{T}$ der Hauptteil des Integralkerns des Neumannoperators $\mathbf{N}$.

Zu erwähnen ist dabei, daß wir also $\mathcal{K}(\zeta, z)$ gar nicht selbst zu kennen brauchen. Es reicht, einen Kern $\tilde{\mathcal{K}}(\zeta, z)$ zur Verfügung zu haben, der im Sinne von

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}(\zeta, z) &= \mathcal{K}(\zeta, z) + \mathcal{Z}_2^a, \\ \tilde{\mathcal{K}}^*(\zeta, z) &= \mathcal{K}^*(\zeta, z) + \mathcal{Z}_2^a. \end{aligned}$$

eine Approximation von $\mathcal{K}(\zeta, z)$ angibt.

5.2 Berechnung aus einer Homotopieformel für $\bar\partial$

Einen ähnlichen Weg kann man gehen, wenn zwar ein Lösungsoperator für $\bar\partial$ mit Homotopierelation gegeben ist, aber a priori keine Informationen über dessen Beziehung zum kanonischen Operator $\mathbf{K}$ bekannt sind.

Bereits 1987 haben Lieb/Range dieses Verfahren in einem streng pseudokonvexen Gebiet mit glattem Rand für die Situation einer Levimetrik angewendet [LiR 87], analog hat Michel in [Mic 92] Kerne für streng pseudokonkave Gebiete gefunden. In beiden Fällen zeigt sich, daß die auftretenden expliziten Kerne zulässig bzw. isotrop sind, und es ist möglich, den Hauptteil des Operators mit asymptotischen Z-Operatoren höherer Ordnung als Fehlerterme zu identizieren.

Theorem 90. *Es seien $\tilde{\mathcal{K}}(\zeta, z)$ und $\tilde{\mathcal{N}}(\zeta, z)$ die Kerne zulässiger Operatoren $\tilde K$ vom Typ 1 bzw. $\tilde N$ vom Typ 2, und es gelte für alle $f \in \operatorname{dom}\bar\partial \cap \operatorname{dom}\bar\partial^*$*

i) $f = (\bar\partial f, \overline{\tilde{\mathcal{K}}}) + (\bar\partial f, \overline{\mathcal{R}_2}) + (\bar\partial^* f, \overline{\tilde{\mathcal{K}}^*}) + (\bar\partial^* f, \overline{\mathcal{R}_2}) + Z_1 f,$

ii) $\partial_\zeta \tilde{\mathcal{N}} = \tilde{\mathcal{K}} + \mathcal{R}_2,$

iii) $\partial_\zeta^* \tilde{\mathcal{N}} = \tilde{\mathcal{K}}^* + \mathcal{R}_2,$

wobei die $\mathcal{R}_2$ für verschiedene $\mathcal{Z}_2$-Kerne stehen, die noch $\partial_\zeta \mathcal{R} = \mathcal{Z}_1$ erfüllen.

Dann ist $\tilde K$ der Hauptteil des kanonischen Lösungsoperators $\mathbf{K}$ und $\tilde N$ der Hauptteil des Neumannoperators $\mathbf{N}$, d. h. es gibt asymptotisch zulässige Operatoren Z_2^a und Z_3^a, so daß

$$\mathbf{N} = \tilde N + Z_3^a \qquad \textit{und} \qquad \mathbf{K} = \tilde K + Z_2^a$$

gilt.

Im dritten Teil dieser Arbeit werden wir uns als konkrete geometrische Situation eine Metrik auf einem streng pseudokonvexen Gebiet vorgeben und zeigen, wie wir die im Theorem vorausgesetzte Situation herstellen können. Wir werden dafür nur die Randwerte der beteiligten Kerne benötigen, was die Lösung des Gleichungssystems *ii*) und *iii*) deutlich vereinfacht. Auf diese Weise erhalten wir ebenfalls explizite Ausdrücke für die Hauptteile des Neumannoperators und des kanonischen Lösungsoperators für $\bar\partial$.

6 Tangentiale Randwerte

6.1 Randwerte von Funktionen und Formen

Neben dem streng pseudokonvexen Gebiet $D \subset \mathbb{C}^n$ können wir auch seinen Rand bD als reelle bzw. Cauchy-Riemann-Mannigfaltigkeit studieren. Wir möchten dabei tangentiale Formen auf bD betrachten, welche wir als Randwerte von Formen in $\overline{D}$ gewinnen und fassen zunächst einige Definitionen und Ergebnisse ohne Beweis zusammen:

Definition 91. Es sei mit

$$\iota : bD \to \overline{D}$$

die Inklusionsabbildung bezeichnet, dann können wir zunächst jede stetige Form $f \in C^0_{p,q}(\overline{D})$ von $\overline{D}$ nach bD zurückziehen und erhalten so auf wohldefinierte Weise ihren *tangentialen Randanteil* oder kurz *Tangentialanteil*

$$f|_t := \iota^* f.$$

Statt $f|_t$ schreiben wir auch f_t, wenn keine Verwechselung zu befürchten ist.

Bemerkung. Offensichtlich gilt $f|_t \in C^0_{p,q}(bD)$, und da $d\rho|_t \equiv 0$ ist, ist f_t genau derjenige Anteil von f, der nur auf die Vektorfelder in tangentialer Richtung wirkt, jedoch das orthogonal zu ihnen stehenden Normalenfeld annulliert.

Lemma 92. *Für $(0,q)$-Formen können wir die Form f_t auch bestimmen durch*

$$f_t(\zeta) = \frac{\partial\rho}{|\partial\rho|^2} \lrcorner\, \bar\partial\rho \wedge f(\zeta) \qquad \text{für } \zeta \in bD,$$

wobei $\lrcorner$ das innere Produkt zwischen zwei Formen bezeichnet, also $\eta \lrcorner g$ definiert ist durch

$$\langle \eta \lrcorner g, f\rangle := \langle g, \bar\eta \wedge f\rangle.$$

für jedes f.

Wenn wir eine lokale Orthonormalbasis $\bar e_1, \bar e_2, \ldots, \bar e_n$ für die $(0,1)$-Formen in der Nähe eines Randpunktes wählen, wobei wir $e_1 := \bar\partial\rho / |\bar\partial\rho|$ fixieren und f in Multiindex-Schreibweise bezüglich dieses Systems darstellen als

$$f(\zeta) = \sum_{|I|=q} a_I(\zeta) \bar e^I,$$

dann ist der Tangentialanteil durch das Fehlen von $\bar e_1$ gekennzeichnet, d.h.

$$f_t(\zeta) = \sum_{\substack{|I|=q \\ 1 \notin I}} a_I(\zeta) \bar e^I.$$

Mit einer Definition von Hefer aus [Hef 02] können wir für eine wesentlich größere Klasse von Funktionen bzw. Formen Randwerte bilden, wobei die üblichen Fälle von Randwerten stetiger Funktionen und Spuren von Sobolev-Funktionen eingeschlossen sind. Die Definition selbst ist dabei für p-Ströme im $\mathbb{R}^d$ formuliert, überträgt sich aber durch die üblichen Identifikationen auf Formen im $\mathbb{C}^n$:

Definition 93 (Hefer)**.** Es sei $u \in \mathcal{D}'_p(D)$ ein Strom. Es sei $\varphi \in C^1_{n-p}(\overline{D})$ und $(h_\eta)_{0<\eta<\eta_0}$ eine Funktionenfamilie mit den Eigenschaften[7]

- $0 \leq h_\eta \leq 1$,
- $h_\eta \equiv 1$ auf $\overline{D_{2\eta}}$,
- $h_\eta \equiv 0$ auf $\overline{D} - D_\eta$,
- $\|h_\eta\|_{C^1(\overline{D})} \leq \frac{C}{\eta}$ wobei C nicht von η abhängt,
- $dh_\eta = g_\eta dr$, wobei die $g_\eta \in C^0(\overline{D})$ mit supp $g_\eta \subset \overline{D_\eta - D_{2\eta}}$ sind, und
- $\|g_\eta\|_{C^0(\overline{D})} \leq \frac{C'}{\eta}$ wobei C' nicht von η abhängt.

Wenn dann

$$u[\varphi] := \lim_{\eta \to 0} u[h_\eta \varphi]$$

für jedes φ und (h_η) existiert, und der Ausdruck wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Wahl von (h_η), dann ist u ein lineares Funktional auf $C^1_{n-p}(\overline{D})$. Es mögen nun für jedes $\varphi \in C^\infty_{n-p}(\overline{D})$ und jedes $\tilde{\varphi} \in C^\infty(\overline{D})$ die Ausdrücke $u[\varphi]$ und $du[\tilde{\varphi}]$ existieren wie oben beschrieben. Dann setzen wir für jedes $\varphi \in C^\infty_{n-p-1}(bD)$ mit beliebiger glatter Fortsetzung $\hat{\varphi}$ nach $\overline{D}$

$$u_b[\varphi] := du[\hat{\varphi}] + (-1)^p u[d\hat{\varphi}]$$

und nennen u_b die *Distributionsrandwerte von u*, falls das so gegebene lineare Funktional u_b stetig ist, also $u_b \in \mathcal{D}'_p(bD)$ gilt.

Bemerkung. Diese Definition ist selbstverständlich zu technisch, um sie im Einzelfall zur Prüfung zu verwenden, ob eine gegebene Form Randwerte besitzt. Hefer gibt deshalb noch einige Kriterien, um Klassen von Strömen zu identifizieren, welche stets Randwerte besitzen. Für uns sind dabei nur die einfachsten Fälle interessant, welche wir nun im Komplexen angeben:

Lemma 94.

- *Es sei $f \in C^0(\overline{D})$, dann hat f Randwerte im Distributionensinn, und diese stimmen mit den bekannten Randwerten stetiger Funktionen überein. Insbesondere ist also $f_b \in C^0(bD)$.*

[7] Solche Familien gibt es für jedes beschränkte Gebiet mit glattem Rand, wie Hefer in [Hef 02] zeigt.

- *Es sei $f \in W^{s,p}(D)$ mit $s > \frac{1}{p} > 0$, und $s - \frac{1}{p}$ sei nicht ganzzahlig. Dann hat f Distributionsrandwerte und diese Stimmen mit tr f, der Sobolev-Spur von f, überein. Insbesondere ist $f_b \in W^{s-\frac{1}{p},p}(bD)$.*

Ein zentraler Grund, warum Distributionsrandwerte wichtig für unsere Betrachtungen sind, ist das Weiterbestehen eines Satzes von Stokes in dieser Situation:

Satz 95. *Es sei f eine $(d-1)$-Form im $\mathbb{R}^d$ mit Distributionsrandwerten f_b. Dann gilt*

$$\int_D df \;=\; \int_{bD} f_b,$$

sofern die Integrale existieren. Die Interpretation beider Seiten erfolgt dabei nach Definition 93.

6.2 Randwerte von Integraloperatoren

Für Integraloperatoren haben wir zwei verschiedene Möglichkeiten, ihnen Randwerte zuzuordnen:

Definition 96. Es sei ein Integraloperator A gegeben durch

$$Af(z) = \int_D \mathcal{A}(\zeta, z) f(\zeta) dl(\zeta)$$

mit einem Kern $\mathcal{A}$, welcher stetig auf $\overline{D} \times \overline{D} - \Lambda$ ist .

Dann definieren wir A^b, den Operator der *Distributionsrandwerte*, durch

$$A^b f(z) := Af(z)|_b,$$

also als Operator, der – falls möglich – der Form f die Distributionsrandwerte der Form Af zuweist.

Dagegen bezeichnen wir mit A_b den Operator der *Restriktionsrandwerte*

$$A_b f(z) = \int_D \mathcal{A}_b(\zeta, z) f(\zeta) dl(\zeta), \tag{97}$$

also den Operator, der durch Integration gegen die Randwerte von $\mathcal{A}(\zeta, z)$ bezüglich z entsteht.

Bemerkung. Um Aussagen über den Operator A treffen zu können, interessieren wir uns wegen Satz 95 im Grunde für die Distributionsrandwerte von A. Wir haben jedoch quasi keinen analytischen Zugang zu ihnen, insbesondere können wir sie nicht ohne weiteres durch einen Integraloperator darstellen. Wegen der Stetigkeit des Kerns $\mathcal{A}$ sind die Restriktionsrandwerte wesentlich leichter zu gewinnen, und mit Gleichung (97) stehen sie immer als Integraloperator zur Verfügung.

Unser Ziel ist daher, Fälle zu identifizieren, in denen Distributions- und Restriktionsrandwerte übereinstimmen. Positive wie negative Ergebnisse dazu hat Hefer dargestellt:

Satz 98. *Selbst wenn für einen Operator sowohl Distributionsrandwerte als auch Restriktionsrandwerte erklärt sind, müssen diese nicht übereinstimmen.*

Beweis. Hefer gibt in [Hef 02] ein explizites Gegenbeispiel an: Er konstruiert einen Integralkern $\mathcal{A}$, der sogar C^∞ differenzierbar auf $\overline{D} \times \overline{D} - \Lambda$ und gleichmäßig integrierbar in beiden Variablen ist, doch bereits für $f \equiv 1$ gilt $A_b f \neq A^b f$.

Satz 99. *Es sei $\mathcal{K}(\zeta, z)$ ein Integralkern, der die Voraussetzungen für gleichmäßige Regulärität nach Definition 61 erfüllt. Dann existieren für den durch $\mathcal{K}$ auf $L^\infty(D)$ gegebenen Integraloperator*

$$Kf : L^\infty(D) \to L^\infty(D)$$

Distributions- und Restriktionsrandwerte, und diese stimmen überein.

Für Formen in beliebigen L^p-Räumen haben wir keine ähnlich einfache Aussage, es gilt jedoch ein weiterer Satz von Hefer, dessen Voraussetzungen wir später für eine große Klasse von Kernen verifizieren werden:

Satz 100. *Es sei $\mathcal{K}(\zeta, z) \in C^0(\overline{D} \times \overline{D} - \Lambda)$ ein Integralkern, der gleichmäßig integrierbar in beiden Variablen ist und die Bedingung erfüllt, daß ab einem $\eta_0 > 0$ für alle $0 < \eta < \eta_0$ gilt:*

$$\left| \int_{bD_\eta} \mathcal{K}(\zeta, z) d\sigma(z) \right| < M \qquad \textit{gleichmäßig in } \zeta,$$

wobei die $bD_\eta := \{z \in D \mid -r(z) = \eta\}$ Niveaulinien der Randfunktion r in D beschreiben und $d\sigma$ jeweils ihr Volumenelement ist. Dann stimmen für den zugehörigen Integraloperator K auf $L^p(D)$

$$Kf : L^p(D) \to L^p(D)$$

für alle $1 \leq p \leq \infty$ jeweils Distributions- und Restriktionsrandwerte überein.

6.3 Tangential zulässige Kerne

Definition 101. Es sei $\mathcal{A}_t$ ein Integralkern auf $\overline{D} \times bD$. Dann nennen wir $\mathcal{A}_t$ *tangential zulässig*, falls es einen zulässigen Kern $\mathcal{A}$ auf $\overline{D} \times \overline{D}$ gibt, so daß $\mathcal{A}_t$ den Restriktionsrandwerten von $\mathcal{A}$ entspricht, d.h.

$$\mathcal{A}_t(\zeta, z) = \mathcal{A}_b(\zeta, z) \qquad \text{für } (\zeta, z) \in \overline{D} \times bD.$$

Bemerkung. Jeder tangential zulässige Kern ist natürlich Randwert nicht nur eines, sondern beliebig vieler zulässiger Kerne. Insbesondere hat jeder zulässige Kern, der eine positive Potenz der Randfunktion $r(z)$ oder ein $\bar{\partial}r$-Differential enthält, die Restriktionsrandwerte 0. Als Kandidaten zulässiger Kerne $\mathcal{A}$ in Definition 101 betrachten wir der Einfachheit halber nur Kerne, die keine Summanden mit solchen Faktoren enthalten.

Definition 102. Es sei $\mathcal{A}_\lambda$ zulässig und in lokaler Darstellung sei

$$\mathcal{A}_\lambda(\zeta, z) = (-\rho)^\delta E_m v^{t_1} \bar{v}^{t_2} v^{*t_3} \bar{v}^{*t_4} \mathrm{P}^{-t_0}. \tag{103}$$

Dann definieren wir den *tangentialen Typ* λ_t von $\mathcal{A}_\lambda$ als

$$\lambda_t := 2n - 1 + \min(1, t-\delta) - 2(t-\delta) - 2t_0 + m,$$

wobei wie üblich $t := -(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)$.

Lemma 104. *Zwischen dem üblichen Typ λ eines Kerns $\mathcal{A}$ mit einer Darstellung wie in Definition 103 und dem tangentialen Typ λ_t seiner Randwerte besteht der Zusammenhang:*

$$\lambda_t \geq \begin{cases} \lambda - 1 & \text{für} \quad t - \delta \leq 1, \\ \lambda - (t - \gamma - \delta) & \text{für } 1 < t - \delta < 2, \\ \lambda - 2 & \text{für } 2 \leq t - \delta. \end{cases}$$

Dabei tritt Ungleichheit nur auf, wenn im tangentialen Anteil von $\mathcal{A}_\lambda$ eine schwächere Singularität vorliegt als im nicht-tangentialen.

Umgekehrt finden wir zu jedem tangential zulässigen Kern $\mathcal{A}_b$ vom tangentialen Typ λ_t einen zulässigen Kern $\mathcal{A}$ vom Typ λ, so daß Gleichheit im obigen Zusammenhang zwischen λ_t und λ herrscht.

Beweis. Dies folgt direkt aus den jeweiligen Definitionen. Um den Kern $\mathcal{A}$ zu gewinnen, nutzen wir aus, daß alle Komponenten der lokalen Darstellung von $\mathcal{A}_b$ in einer Umgebung des Randes definiert sind, und setzen beliebig glatt auf den Rest von $\overline{D} \times \overline{D}$ fort.

Mit Hilfe des tangentialen Typs können wir die Gleichheit der Distributions- und Restriktionsrandwerte für viele zulässige Operatoren zeigen. Zunächst erhalten wir

Satz 105. *Es sei $\mathcal{A}$ ein zulässiger Kern vom Typ λ. Seine Restriktionsrandwerte $\mathcal{A}_b$ seien vom tangentialen Typ*

i) $\lambda_t > 0$, *oder*

ii) $\lambda_t = 0$, *wobei* $t - \delta \geq \frac{3}{2}$, $\delta > 0$.

Dann gilt für den Kern der Einschränkungsrandwerte

$$\int\limits_{bD} |\mathcal{A}_b(\zeta, z)| d\sigma(z) < M \qquad \textit{gleichmäßig in } \zeta.$$

Beweis. Wenn $\mathcal{A}_b$ in lokaler Darstellung eine echte Potenz $(-r)^\gamma$ der Randfunktion enthält, gilt $\mathcal{A}_b \equiv 0$ und das Integral existiert natürlich mit Wert 0. Wir müssen daher nur Kerne mit $\gamma = 0$ betrachten.

Um in unserer üblichen Notation bleiben zu können, beweisen wir die analoge Aussage zur Behauptung, wenn wir die Bezeichnungen ζ und z vertauschen und den Kern $\mathcal{A}(z,\zeta)$ betrachten. Zu zeigen ist dann, daß

$$\int_{bD} |\mathcal{A}_b(z,\zeta)| d\sigma(\zeta) < M \qquad \text{gleichmäßig in } z.$$

Wegen der Stetigkeit von $\mathcal{A}$ außerhalb der Randdiagonalen können wir wiederum annehmen, daß $z \in U(z_0)$ ist, wobei z_0 ein Randpunkt und $U(z_0)$ eine beliebig kleine, fest gewählte Umgebung sind, sowie daß die Integration nur über $bD \cap U(z_0)$ verläuft. Dann erhalten wir die Darstellung

$$|\mathcal{A}_b(z,\zeta)| = \frac{(-r)^\delta E_m}{|v|^t \mathrm{P}^{t_0}},$$

und in zulässigen Koordinaten, bei denen wir ausnutzen können, daß $(0, x_2, \tilde{x})$ ein Randkoordinatensystem ist, gilt:

$$I := \int_{bD} |\mathcal{A}_b(z,\zeta)| d\sigma(\zeta) \lesssim \int_{\|\tilde{x}\|<1} \int_{0<x_2<1} \frac{(-r)^\delta |E_m|}{((-r) + x_2 + \|\tilde{x}\|^2)^t((-r)^2 + x_2^2 + \|\tilde{x}\|^2)^{t_0}} dx_2\, dl(\tilde{x}).$$

Im Fall, daß $\frac{m}{2} \geq t - \delta + t_0$ ist, können wir gegen einen Kern ohne Singularität abschätzen. Das Integral ist dann auf jeden Fall beschränkt. Andernfalls betrachten wir zunächst den Fall $\lambda_t > 0$. Wie üblich schätzen wir ab

$$I \lesssim \int_{\|\tilde{x}\|<1} \int_{0<x_2<1} \frac{1}{((-r) + x_2 + \|\tilde{x}\|^2)^{t'}((-r) + x_2 + \|\tilde{x}\|)^{2t'_0}} dx_2\, dl(\tilde{x}),$$

wobei $t' = t - \delta + t_0 - \frac{m}{2}$ und $t'_0 = 0$ für $m > 2t_0$ bzw. $t' = t - \delta$ und $t'_0 = t_0 - \frac{m}{2}$ sonst,

$$\lesssim \int_{\|\tilde{x}\|<1} \int_{0<x_2<1} \frac{1}{(x_2 + \|\tilde{x}\|^2)^{t'}(x_2 + \|\tilde{x}\|)^{2t'_0}} dx_2\, dl(\tilde{x}).$$

Im Nenner schätzen wir die Summen positiver Terme durch Produkte ab

$$\lesssim \int_{\|\tilde{x}\|<1} \int_{0<x_2<1} \frac{1}{x_2^\eta \|\tilde{x}\|^{2(t'-\eta)} x_2^{\eta'} \|\tilde{x}\|^{2t'_0-\eta'}} dx_2\, dl(\tilde{x}),$$

was für alle $0 \leq \eta \leq 2t'$ und $0 \leq \eta' \leq 2t'_0$ möglich ist. Das Integral ist als beschränkt gezeigt, wenn wir $\eta, \eta' \geq 0$ finden könnnen mit

$$\eta + \eta' < 1 \qquad \text{und} \qquad 2t' + 2t'_0 - 2\eta - \eta' < 2n - 2.$$

Dazu verwenden wir die Typvoraussetzung, daß nämlich

$$\lambda_t = 2n - 1 + \min(1, t - \delta) - 2(t - \delta) - 2t_0 + m > 0$$

ist, also insbesondere stets

$$2(t-\delta)+2t_0-m \leq 2n-\lambda_t \tag{106}$$

und

$$(t-\delta)+2t_0-m \leq 2n-1-\lambda_t \tag{107}$$

gilt. Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

- Für $t_0' = 0$ ist automatisch $\eta' = 0$ festgelegt. Dann setzen wir $\eta := 1 - \frac{\lambda_t}{3}$ und erhalten mit $t' = t - \delta + 2t_0 - m$

  $$2(t'-\eta) = 2(t-\delta)+2t_0-m-2+\frac{2\lambda_t}{3} \overset{(106)}{\leq} 2n-2-\frac{\lambda_t}{3},$$

  und damit ist die Beschränktheit des Integrals gezeigt.

- Für $t_0' \neq 0$ und $t' < 1$ setzen wir $\eta := t'$ und $\eta' := 1 - t' - \frac{\lambda_t}{2}$. Mit $t' = t - \delta$ und $t_0' = t_0 - \frac{m}{2}$ folgt

  $$2t_0' - \eta' = t-\delta+2t_0-m-1+\frac{\lambda_t}{2} \overset{(107)}{\leq} 2n-2-\frac{\lambda_t}{2}.$$

- Für $t_0' \neq 0$ und $t' \geq 1$ setzen wir $\eta := 1 - \frac{\lambda_t}{3}$ und $\eta' := 0$. Wiederum mit $t' = t - \delta$ und $t_0' = t_0 - \frac{m}{2}$ folgt

  $$2(t'-\eta)+2t_0' = 2(t-\delta)+2t_0-m-2+\frac{2\lambda_t}{3} \overset{(106)}{\leq} 2n-2-\frac{\lambda_t}{3}.$$

In allen drei Fällen sind wir erfolgreich, und somit ist der Satz für den Fall $\lambda_t > 0$ bewiesen.

Für $\lambda_t = 0$ mit $\delta > 0$ und $t - \delta \geq \frac{3}{2}$ gehen wir zunächst analog vor, bis zur Abschätzung

$$I \lesssim \int\limits_{\|\tilde{x}\|<1} \int\limits_{0<x_2<1} \frac{(-r)^\delta}{((-r)+x_2+\|\tilde{x}\|^2)^{t'}((-r)+x_2+\|\tilde{x}\|)^{2t_0'}} dx_2 \; dl(\tilde{x}),$$

wobei entweder $t_0' = 0$ und $t' = t + t_0 - \frac{m}{2}$ oder $t_0' = t_0 - \frac{m}{2}$ und $t' = t$. In Polarkoordinaten mit $\|\tilde{x}\| = s$ erhalten wir

$$\lesssim (-r)^\delta \int\limits_{0<s<1} \int\limits_{0<x_2<1} \frac{s^{2n-3}}{((-r)+x_2+s^2)^{t'}((-r)+x_2+s)^{2t_0'}} dx_2 \; ds.$$

Nach Typvoraussetzung ist $2t_0' \leq 2t_0 - m = 2n - 2(t-\delta) \leq 2n-3$, aber $2n - 3 - 2t_0' = 2t' - 3 - 2\delta < 2t'$, also können wir den Zähler komplett gegen den zweiten Faktor im Nenner und einen Anteil des ersten Faktors kürzen und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\lesssim (-r)^\delta \int\limits_{0<s<1} \int\limits_{0<x_2<1} \frac{1}{((-r)+x_2+s^2)^{t'+t_0'+\frac{3}{2}-n}} dx_2 \; ds \\
&\lesssim (-r)^\delta \int\limits_{0<s<1} \int\limits_{0<x_2<1} \frac{1}{((-r)+x_2+s^2)^{\frac{3}{2}+\delta}} dx_2 \; ds.
\end{aligned}$$

Der Exponent des Nenners ist größer als 1, so daß wir nach Integrieren über x_2 erhalten

$$\lesssim (-r)^{\delta} \int_0^1 \frac{1}{((-r)+s^2)^{\frac{1}{2}+\delta}} ds.$$

Wir substituieren $s = \sqrt{-r}\sigma$ und erhalten

$$\lesssim \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+\sigma^2)^{\frac{1}{2}+\delta}} d\sigma,$$

was beschränkt ist, da $\delta > 0$ vorausgesetzt war.

Als wichtigste Folgerung erhalten wir

Satz 108. *Es sei $\mathcal{A}$ ein zulässiger Kern vom Typ $\lambda > 0$. Seine Restriktionsrandwerte $\mathcal{A}_b$ seien vom tangentialen Typ*

i) $\lambda_t > 0$ *oder*

ii) $\lambda_t = 0$, *wobei* $t - \delta \geq \frac{3}{2}$, $\delta > 0$.

Dann stimmen Distributions- und Restriktionsrandwerte des zugehörigen Operators

$$A : L^p(D) \to L^p(D) \qquad \text{für alle } 1 \leq p \leq \infty$$

überein.

Beweis. Wir zeigen, daß ein solcher Kern die Voraussetzungen von Satz 100 erfüllt, wobei wir die gleiche Notation wie in Satz 105 verwenden, also wiederum die analoge Aussage für vertauschtes ζ und z beweisen. Da $\lambda > 0$ ist, ist $\mathcal{A}$ bezüglich beider Variablen gleichmäßig über D integrierbar. Zu zeigen ist dann noch, daß

$$\int_{bD_\eta} \mathcal{A}(z,\zeta) d\sigma(\zeta) < M \qquad \text{gleichmäßig in } z \text{ und } 0 \leq \eta \leq \eta_0,$$

wobei $bD_\eta := \{-\rho(\zeta) = \eta\}$. Wie zuvor müssen wir nur in einer Umgebung $U(z_0)$ eines Randpunktes z_0 arbeiten, so daß die Integration über $bD_\eta \cap U$ verläuft. Indem wir zulässige Koordinaten verwenden, erhalten wir, daß bei konstantem $x_1 = \eta$ durch $(\eta, x_2, \tilde{x})$ ein Koordinatensystem auf bD_η gegeben ist, also

$$\begin{aligned}\left| \int_{bD_\eta \cap U} \mathcal{A}(z,\zeta) d\sigma(\zeta) \right| &\lesssim \int_{|x_2|<1} \int_{\|\tilde{x}\|<1} \frac{(-r)^{\delta} \eta^{\gamma} E_m}{(\eta + |x_2| + \|\tilde{x}\|^2)^t (\eta^2 + x_2^2 + \|\tilde{x}\|^2)^{t_0}} dx_2 \wedge dl(\tilde{x}) \\ &\lesssim \int_{|x_2|<1} \int_{\|\tilde{x}\|<1} \frac{(-r)^{\delta} E_m}{(\eta + |x_2| + \|\tilde{x}\|^2)^{t-\gamma} (\eta^2 + x_2^2 + \|\tilde{x}\|^2)^{t_0}} dx_2 \wedge dl(\tilde{x}).\end{aligned}$$

Offensichtlich ist das Integral monoton wachsend, wenn wir η verkleinern, also

$$\lesssim \int\limits_{|x_2|<1} \int\limits_{\|\tilde{x}\|<1} \frac{(-r)^{\delta} E_m}{(|x_2| + \|\tilde{x}\|^2)^{t-\gamma}(x_2^2 + \|\tilde{x}\|^2)^{t_0}} dx_2 \wedge dl(\tilde{x}).$$

Die Beschränkheit dieses Integrals, unabhängig von z hatten wir unter passenden Voraussetzungen an $\mathcal{A}$ in Satz 105 gezeigt, so daß die Behauptung gezeigt ist.

Als direkte Folgerung erhalten wir eine einfache Klassifikation zulässiger Kerne:

Korollar 109. *Es sei $\mathcal{A}$ ein zulässiger Kern vom Typ* 1*. Dann stimmen die Distributions- und Restriktionsrandwerte des Operators, der durch $\mathcal{A}' := (-\rho)^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}$ gegeben wird, auf sämtlichen L^p-Räumen überein.*

Beweis. Die lokale Darstellung des Kerns $\mathcal{A}$ vom Typ 1 liefert uns, daß

$$\left|(-\rho)^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}(\zeta, z)\right| = \frac{(-r)^{\gamma}(-\rho)^{\delta+\frac{1}{2}} E_m}{|v|^t \mathrm{P}^{t_0}},$$

wobei entweder

$$\begin{array}{lll} t - \delta - \gamma \geq 2 & \text{und } 2n + 2 - 2(t - \delta - \gamma) - 2t_0 + m = 1 & \text{oder} \\ t - \delta - \gamma < 2 & \text{und } 2n - (t - \delta - \gamma) - 2t_0 + m = 1. & \end{array}$$

Wir untersuchen nun λ_t:

- Es sei $t - \gamma - \delta \leq \frac{3}{2}$, dann hat $\mathcal{A}'$ den Typ $\lambda' = \frac{3}{2}$. Nach dem ersten Fall von Lemma 104 gilt, daß

  $$\lambda'_t \geq \lambda' - 1 = \frac{1}{2} > 0,$$

  also ergibt sich die zu zeigende Aussage nach Satz 108 *i*).

- Es sei $\frac{3}{2} \leq t - \delta < 2$, dann hat wiederum $\mathcal{A}'$ den Typ $\lambda' = \frac{3}{2}$, und nun liefert der zweite Fall von Lemma 104, daß

  $$\lambda'_t \geq \lambda' - (t - \delta - \frac{1}{2}) > 0,$$

  und die zu zeigende Aussage folgt nach Satz 108 *i*).

- Es sei $2 \leq t - \delta \leq \frac{5}{2}$, dann hat $\mathcal{A}'$ den Typ $\lambda' = (t - \delta - \frac{1}{2})$. Damit gilt nach dem zweiten Fall von Lemma 104 nur noch

  $$\lambda_t \geq \lambda' - (t - \delta - \frac{1}{2}) = 0.$$

  Da jedoch gleichzeitig $t - \delta - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}$, sehen wir aus der Form von $\mathcal{A}'_b$, daß auch im Fall $\lambda'_t = 0$ die Voraussetzungen von Satz 108 *ii*) erfüllt sind.

- Es sei $\frac{5}{2} < t - \delta$, dann hat $\mathcal{A}'$ den Typ $\lambda' = 2$ und nach dem dritten Fall von Lemma 104 ist $\lambda_t \geq 0$. Die Argumentation verläuft nun genauso wie im vorherigen Fall.

Korollar 110. *Es sei $\mathcal{A}_\lambda$ ein zulässiger Kern vom Typ $\lambda > 2$ oder $\lambda = 2$ mit $\delta > 0$ in lokaler Darstellung. Dann stimmen die Distributions- und Restriktionsrandwerte des durch ihn gegebenen Operators auf sämtlichen L^p-Räumen überein.*

Beweis. Nach Lemma 104 gilt $\lambda_t > 0$, falls $\lambda > 2$ oder $\lambda = 2$ und $t - \delta - \gamma < 2$ in der lokalen Darstellung von $\mathcal{A}$. Falls $\lambda = 2$ und $t - \delta - \gamma \geq 2$ ist, gilt nur noch $\lambda_t \geq 0$. In beiden Fällen folgt die Behauptung jedoch aus Satz 108 i) bzw. ii).

Korollar 111. *Es sei $\mathcal{A}$ ein zulässiger Kern vom Typ 0, wobei in den lokalen Darstellungen $\gamma = 0$ ist und $t - \delta > \frac{5}{2}$ oder $t - \delta < 2$. Dann stimmen die Distributions- und Restriktionsrandwerte des Operators, der durch $\mathcal{A}' := (-\rho)\mathcal{A}$ gegeben wird, auf sämtlichen L^p-Räumen überein.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu Korollar 109, wobei in diesem Fall die Einschränkung an die Exponenten notwendig ist, damit gesichert ist, daß wir auch in diesem Fall für $\lambda_t = 0$ Satz 108 *ii*) anwenden können.

6.4 Abbildungseigenschaften tangential zulässiger Kerne

Wir möchten nun untersuchen, wie das Abbildungsverhalten der Randwerte tangential zulässiger Kerne vom Typ abhängt. Die benötigten Grundlagen haben wir dabei in den letzten Kapiteln gewonnen. Dabei werden wir im folgenden nur noch Kerne betrachten, bei denen Distributions- und Restriktionsrandwerte übereinstimmen und insgesamt von „den Randwerten" eines Kerns oder Operators sprechen:

Satz 112. *Es sei $\mathcal{A}$ zulässig vom Typ $\lambda > 0$. Dann hat der zugehörige Operator*

$$A : L^\infty(D) \to C^0(\overline{D})$$

Randwerte A^b und es gilt

$$A^b : L^\infty(D) \to C^0(bD).$$

Beweis. Es sei $f \in L^\infty(D)$. Dann wissen wir nach Korollar 63, daß $Af \in C^0(\overline{D})$ liegt. Aus Lemma 94 folgt dann die Existenz der Distributionsrandwerte von Af und daß diese mit den gewöhnlichen Randwerten von Af als stetige Form übereinstimmen. Diese hatten wir im Beweis von Korollar 63 gerade als Einschränkungsrandwerte von A identifiziert.

Definition 113. Es sei $\mathcal{A}$ ein Integralkern auf $\overline{D} \times \overline{D}$. Wir nennen dann $\mathcal{A}$ *zulässig mit Randwerten* $\mathcal{A}^b$, wenn die Distributions- und Restriktionsrandwerte des zugehörigen Operators übereinstimmen und durch Integration gegen $\mathcal{A}^b$ gegeben sind. Falls keine anderen Voraussetzungen gemacht sind, bezieht sich die Voraussetzung auf A als Operator auf beliebigen L^p-Räumen mit $1 \leq p \leq \infty$.

Satz 114. *Es sei $\mathcal{A}$ zulässig vom Typ > 0 und mit Randwerten $\mathcal{A}^b$, wobei $\mathcal{A}^b(\zeta, .)$ für jedes ζ über bD integrierbar ist und das Integral durch eine von ζ unabhängige Konstante beschränkt ist. Dann gilt für den zugehörigen Operator A^b:*

$$A^b : L^p(D) \to L^p(bD) \qquad \textit{für alle } 1 \leq p \leq \infty.$$

Beweis. Die Aussage ergibt sich aus dem Youngschen Lemma 45 im Fall von $X = D$ und $Y = bD$. Die gleichmäßige Integrierbarkeit von $\mathcal{A}$ in z ist dabei vorausgesetzt, die in ζ folgt aus dem echt positiven Typ.

Satz 115. *Es sei $\mathcal{A}_\lambda$ zulässig vom Typ $\lambda = 1$. Dann gilt für den Operator seiner Randwerte $\mathcal{A}^b$:*

$$A^b : L^p(D; (-\rho)^{-\frac{1}{2}}) \to L^p(bD) \qquad \textit{für alle } 1 \leq p \leq \infty,$$

wobei jeweils

$$L^p(D; (-\rho)^{-\frac{1}{2}}) := \{f \in L^p(D) \ : \ (-\rho)^{-\frac{1}{2}} f \in L^p(D)\}.$$

Beweis. Das folgt aus dem vorherigen Satz, indem wir den Operator betrachten, der durch $(-\rho)^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}_\lambda$ gegeben ist und für $f \in L^p(D; (-\rho)^{-\frac{1}{2}})$ betrachten, wie dieser auf $(-\rho)^{-\frac{1}{2}} f$ wirkt. Der Kern $(-\rho)^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}_\lambda$ hat nach Korollar 109 Randwerte mit den gewünschten Eigenschaften.

Ebenso erhalten wir

Satz 116. *Es sei $\mathcal{A}_\lambda$ zulässig vom Typ $\lambda > 2$ oder $\lambda = 2$ mit $\delta > 0$ in lokaler Darstellung. Dann gilt für den Operator, der aus seinen Randwerte $\mathcal{A}^b$ entsteht:*

$$A^b : L^p(D) \to L^p(bD) \qquad \textit{für alle } 1 \leq p \leq \infty.$$

Beweis. Daß ein derartiges $\mathcal{A}_\lambda$ die Voraussetzungen von Satz 114 erfüllt, haben wir in Korollar 110 gezeigt.

Indem wir die Ergebnisse des Kapitels über tangentiale Vektorfelder in unsere Betrachtung integrieren, erhalten wir außerdem:

Satz 117. *Es sei A_λ ein zulässiger Operator vom Typ $\lambda > 0$. Dann gilt*

$$A^b : C^k(\overline{D}) \to C^k(bD) \qquad \textit{für alle } k \in \mathbb{N} \textit{ und } k = \infty.$$

Beweis. Für $k = 0$ ist das klar nach Lemma 112. Es sei nun T ein tangentiales Vektorfeld auf bD, das wir glatt ins Innere von $\overline{D}$ fortsetzen. Da $f \in C^1(\overline{D})$ insbesondere stetig ist, sind die (Distributions-)Randwerte von $A_\lambda f$ durch die Einschränkungsrandwerte $A^b f$ gegeben, die wiederum wegen der Stetigkeit von $A^b f$ als Limes der Werte von innen gewonnen werden können.

Wir wenden also Theorem 87 auf A_λ an:

$$T A_\lambda f = A_\lambda \tilde{T} f + \sum_i A^{(i)}_{\lambda+1} X^{(i)} f + \tilde{A}_\lambda f.$$

Da alle Summanden der rechten Seite wiederum zulässige Operatoren vom Typ > 0 sind, die auf stetige Funktionen wirken, entsprechen auch auf der rechten Seite die Einschränkungsrandwerte jeweils den Distributionsrandwerten, und diese liegen wegen der Zulässigkeit und des positiven Typs aller beteiligter Operatoren in $C^0(\overline{D})$. Damit ist die Aussage für $k = 1$ gezeigt und höhere Ableitungen ergeben sich durch Iteration der Methode.

Teil II

Gewichtete Bergmanräume

1 Die Situation

1.1 Die anisotrope Metrik Ω

Wir werden im folgenden eine spezielle geometrische Situation betrachten, für die wir später den Kern des Neumannoperators explizit bestimmen wollen. Die Grundsituation und viele der Methoden gehen zurück auf [ABO 98] und wurden auch in [AnB 00] und [Lam 00] beschrieben.

Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein streng pseudokonvexes Gebiet mit glattem Rand bD, gegeben durch eine streng plurisubharmonische Randfunktion ρ als $D := \{\zeta : \rho(\zeta) < 0\}$, wobei $d\rho \neq 0$ auf bD ist. Auf D betrachten wir die Metriken

$$\langle . , . \rangle_\beta, \qquad \langle . , . \rangle_\omega \quad \text{und} \quad \langle . , . \rangle_\Omega$$

für Differentialformen vom Typ (p, q), die durch die definierenden $(1,1)$-Formen

$$\beta := i\partial\bar{\partial}\rho, \qquad \omega := i\partial\bar{\partial}\log\left(\frac{1}{-\rho}\right) \quad \text{und} \quad \Omega := (-\rho)\omega$$

gegeben sind. Wo keine Unklarheiten zu befürchten sind, werden wir auch die definierende Form selbst als Abkürzung für die zugehörige Metrik verwenden. Da ρ als streng plurisubharmonisch auf $\overline{D}$ vorausgesetzt war, ist β äquivalent zur euklidischen Metrik. ω entspricht im Verhalten der Bergmanmetrik [Die 70]. In beiden Fällen handelt es sich um Kählermetriken, während dies bei Ω nicht der Fall ist.

Da wir im nächsten Kapitel durch Potenzen der Randfunktion gewichtete L^2-Räume bezüglich Ω als Basisraum unserer Betrachtungen wählen werden, untersuchen wir zunächst das Verhalten von Ω für $(0, q)$-Formen in der Nähe des Randes von D.

Lemma 1. *Ω läßt sich mit Hilfe von β darstellen: Für $(0, q)$-Formen f, g gilt*

$$\langle f, g \rangle_\Omega = \frac{1}{B}\left[(-\rho)\langle f, g \rangle_\beta + \langle \bar{\partial}\rho \wedge f, \bar{\partial}\rho \wedge g \rangle_\beta\right],$$

wobei $B := -\rho + |\partial\rho|_\beta^2$ insbesondere glatt und ohne Nullstelle auf ganz $\overline{D}$ ist.

Beweis. Es sei $e^1, \ldots, e^n$ eine β-Orthonormalbasis des Raumes der $(1,0)$-Formen in der Nähe eines beliebigen Randpunktes z, wobei $e^1 := \partial\rho/|\partial\rho|_\beta$ die komplexe Normalenrichtung bezeichne. Dann ist

$$\beta = i\partial\bar{\partial}\rho = i\sum_{i=1}^{n} e^i \wedge \bar{e}^i,$$

$$\Omega = i\partial\bar{\partial}\rho + i\frac{\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho}{(-\rho)} = \frac{B}{(-\rho)} ie^1 \wedge \bar{e}^1 + i\sum_{i=2}^{n} e^i \wedge \bar{e}^i \tag{2}$$

mit B wie im Lemma gegeben. Ω und β stimmen also auf dem Tangentialanteil einer $(0, q)$-Form überein. Auf dem nicht-tangentialen Anteil (d. h. dem Anteil mit $\bar{e}^1$-Differential) hat Ω ein zusätzliches Gewicht $\sqrt{(-\rho)/B}$ gegenüber β.

Indem wir eine beliebige $(0,q)$-Form f zu $f = \bar{e}^1 \wedge f_1 + f_2$ mit f_1, f_2 ohne $\bar{e}^1$-Differential zerlegen, erhalten wir

$$\begin{aligned} |f|_\Omega^2 &= \frac{(-\rho)}{B}|f_1|_\beta^2 + |f_2|_\beta^2 \\ &= \frac{(-\rho)}{B}|f|_\beta^2 + \frac{\left|\bar{\partial}\rho\right|_\beta^2}{B}|f_2|_\beta^2 \\ &= \frac{1}{B}\left[(-\rho)|f|_\beta^2 + \left|\bar{\partial}\rho \wedge f\right|_\beta^2\right], \end{aligned} \tag{3}$$

denn $|f_2|_\beta^2 = |\bar{e}^1 \wedge f|_\beta^2$, und damit die Aussage des Lemmas.

Lemma 4. *Es gilt als grundlegende Abschätzung für* $|\,.\,|_\Omega$*:*

$$(-\rho)|f|_\beta^2 \;\lesssim\; |f|_\Omega^2 \;\lesssim\; |f|_\beta^2.$$

Beweis. B ist bis zum Rand des Gebiets beschränkt und ohne Nullstellen, damit folgt die erste Ungleichung einfach aus Gleichung (3) durch Abschätzen des Terms, der $\bar{\partial}\rho \wedge f$ enthält, gegen 0. Zudem sind auch $|\partial\rho|_\beta^2$ und $(-\rho)$ nach oben beschränkt, so daß $(-\rho)|f|_\beta^2 \lesssim |f|_\beta^2$ und

$$\left|\bar{\partial}\rho \wedge f\right|_\beta^2 \le \left|\bar{\partial}\rho\right|_\beta^2 |f|_\beta^2 \le |f|_\beta^2,$$

woraus wir die zu zeigende Abschätzung erhalten.

Definition 5. Wir bezeichnen mit $*_\Omega$ den Hodge-$*$-Operator bezüglich Ω, d. h. für Differentialformen f und g von passendem Grad und mit $dV = \Omega^n/n!$ als der Volumenform zu Ω gelte

$$\langle f, g\rangle_\Omega dV = f \wedge *_\Omega \bar{g}.$$

Bemerkung. Da Ω keine Kählermetrik ist, hat $*_\Omega$ nicht alle guten Eigenschaften, die man von dem Hodge-$*$-Operator etwa der euklidischen Metrik gewohnt ist. Insbesondere kommutiert er nicht mit dem komplexen Laplaceoperator! Wir haben jedoch eine einfache Möglichkeit, $*_\Omega$ explizit zu berechnen:

Lemma 6. *Es sei g eine $(0,q)$-Form. Dann gilt*

$$*_\Omega g = c_q\, \bar{g} \wedge \Omega_{n-q}, \qquad \textit{also} \qquad \langle f, g\rangle_\Omega dV = c_q f \wedge \bar{g} \wedge \Omega_{n-q}$$

für alle f und

$$*_\Omega(\Omega \wedge g) = -c_{q+1}\, \bar{g} \wedge \Omega_{n-q-1}, \qquad \textit{also} \qquad \langle f, \Omega \wedge g\rangle_\Omega dV = -c_{q+1} f \wedge \bar{g} \wedge \Omega_{n-q},$$

für alle f, wobei $\Omega_{n-q} := \Omega^{n-q}/(n-q)!$ und $c_q = i^{-q^2}$ ist.

Beweis. Wir verwenden wiederum die β-Orthonormalbasis $e^1, \ldots, e^n$ wie in Lemma 1. Zunächst zeigen wir

$$|g|_\Omega^2 \frac{\Omega^n}{n!} = c_q g \wedge \bar{g} \wedge \Omega_{n-q},$$

woraus sich die erste Behauptung ergibt. Dazu sei $g = \sum'_{|I|=q} g_I \bar{e}^I$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
g \wedge \bar{g} \wedge \Omega_{n-q} &= \frac{1}{(n-q)!} \sum_{|I|=q}{}' |g_I|^2 \bar{e}^I \wedge e^I \wedge \left[\frac{B}{(-\rho)} e^1 \wedge \bar{e}^1 + \sum_{j=2}^{n} e^j \wedge \bar{e}^j \right]^{n-q} \\
&= i^{n-q} \sum_{|I|=q}{}' |g_I|^2 \bar{e}^I \wedge e^I \wedge \left[\frac{B}{(-\rho)} \sum_{|K|=n-q-1}{}' e^1 \wedge \bar{e}^1 \wedge (e \wedge \bar{e})^K + \sum_{\substack{|L|=n-q \\ 1 \notin L}} (e \wedge \bar{e})^L \right] \\
&= i^{n-q} \left[\sum_{\substack{|I|=q \\ 1 \notin I}}{}' |g_I|^2 \bar{e}^I \wedge e^I \wedge \frac{B}{(-\rho)} e^1 \wedge \bar{e}^1 \wedge (e \wedge \bar{e})^{N-I} \right] \\
&\quad + i^{n-q} \left[\sum_{|J|=q-1}{}' |g_{1J}|^2 \bar{e}^{1J} \wedge e^{1J} \wedge (e \wedge \bar{e})^{N-iJ} \right] \\
&= i^{q^2} \left[\frac{B}{(-\rho)} \sum_{\substack{|I|=q \\ 1 \notin I}}{}' |g_I|^2 + \sum_{|J|=q-1}{}' |g_{1J}|^2 \right] dl.
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
|g|_\Omega^2 dV &= \Big| \sum_{|I|=q}{}' g_I \bar{e}^I \Big|_\Omega^2 \frac{B}{(-\rho)} dl \\
&= \left[\sum_{|J|=q-1}{}' |g_{1J}|^2 \left| \bar{e}^1 \wedge \bar{e}^J \right|_\Omega^2 + \sum_{\substack{|I|=q \\ 1 \notin I}}{}' |g_I|^2 \left| \bar{e}^I \right|_\Omega^2 \right] \frac{B}{(-\rho)} dl \\
&= \left[\sum_{|J|=q-1}{}' |g_{1J}|^2 \frac{(-\rho)}{B} \left| \bar{e}^J \right|_\beta^2 + \sum_{\substack{|I|=q \\ 1 \notin I}}{}' |g_I|^2 \left| \bar{e}^I \right|_\beta^2 \right] \frac{B}{(-\rho)} dl \\
&= \left[\sum_{|J|=q-1}{}' |g_{1J}|^2 + \sum_{\substack{|I|=q \\ 1 \notin I}}{}' \frac{B}{(-\rho)} |g_I|^2 \right] dl \\
&= c_q g \wedge \bar{g} \wedge \Omega_{n-q},
\end{aligned}$$

da $1/c_q = i^{q^2}$ ist.

Die zweite Gleichung zeigen wir nun mit Hilfe der ersten: Es sei $f = \sum_{i=1}^n e^i \wedge f_i$ eine $(1, q+1)$-Form, wobei die f_i jeweils Formen vom Grad $(0, q+1)$ sind. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\big\langle f, \Omega \wedge g \big\rangle_\Omega dV &= \Big\langle \sum_i e^i \wedge f_i, \left[\frac{B}{(-\rho)} e^1 \wedge \bar{e}^1 + \sum_{j=2}^n e^j \wedge \bar{e}_j \right] \wedge g \Big\rangle_\Omega dV \\
&= \frac{B}{(-\rho)} \big\langle e^1, e^1 \big\rangle_\Omega \big\langle f_1, \bar{e}^1 \wedge g \big\rangle_\Omega dV + \sum_{j=2}^n \big\langle e^j, e^j \big\rangle_\Omega \big\langle f_j, \bar{e}_j \wedge g \big\rangle_\Omega dV \\
&= \big\langle f_1, \bar{e}^1 \wedge g \big\rangle_\Omega dV + \sum_{j=2}^n \big\langle f_j, \bar{e}_j \wedge g \big\rangle_\Omega dV \\
&= c_{q+1} \left[f_1 \wedge e^1 \wedge \bar{g} + \sum_{j=2}^n f_j \wedge \bar{e}^j \wedge \bar{g} \right] \wedge \Omega_{n-q-1} \\
&= -c_{q+1} f \wedge \bar{g} \wedge \Omega_{n-q-1},
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt Teil i) verwendet haben.

1.2 Gewichtete L^2-Räume

Definition 7. Mit Hilfe von Ω bilden wir durch

$$(f, g)_\Omega := \int_D \big\langle f, g \big\rangle_\Omega dV$$

ein L^2-Skalarprodukt und definieren für $0 \leq p, q \leq n$ die zugehörigen Hilberträume als

$$L^{2,\Omega}_{(p,q)}(D) := \big\{ f \in L^{2,\mathrm{loc}}_{p,q}(D) : (f, f)_\Omega < \infty \big\}.$$

Formen in $L^{2,\Omega}_{0,q}(D)$ können wir auch wie folgt charakterisieren:

Lemma 8. *Eine Form $f \in L^{2,\mathrm{loc}}_{0,q}(D)$ ist genau dann in $L^{2,\Omega}_{0,q}(D)$, wenn gilt:*

$$f \in L^2_{0,q}(D) \qquad \textit{und} \qquad (-r)^{-\frac{1}{2}} \bar{\partial}\rho \wedge f \in L^2_{0,q}(D).$$

Beweis. Aus der expliziten Form (2) von Ω erhalten wir zunächst, daß

$$dV = \frac{\Omega^n}{n!} = \frac{B}{(-\rho)} \frac{\beta^n}{n!}.$$

$\beta^n/n!$ unterscheidet sich nur durch einen glatten, durch positive Konstanten beschränkten Faktor vom Lebesgue-Maß. Auch B ist glatt, beschränkt und hat keine Nullstellen auf $\overline{D}$. Der einfacheren Schreibweise halber setzen wir $dl := B\beta^n/n!$ und bezeichnen dieses Volumenelement bisweilen als „euklidisch“. Es gilt also

$$(-\rho) dV = dl. \tag{9}$$

Für eine Form f erhalten wir nach den Gleichungen (3) und (9)

$$
\begin{aligned}
(f,f)_\Omega &\approx \int\limits_D |f|_\beta^2 + (-\rho)^{-1}\left|\bar\partial\rho\wedge f\right|_\beta^2 \, dl \\
&= \int\limits_D |f|_\beta^2 \, dl \quad + \quad \int\limits_D \left|(-\rho)^{-\frac{1}{2}}\bar\partial\rho\wedge f\right|_\beta^2 dl,
\end{aligned}
$$

wobei die Relation $\approx$ dafür steht, daß sich linke und rechte Seite nur durch einen $C^\infty(\overline{D})$-glatten Faktor unterscheiden, der sich auf $\overline{D}$ nach oben und nach unten durch echt positive Konstanten abschätzen läßt (wie dies bei B der Fall ist).

Dies impliziert die Behauptung.

Wie man leicht sieht, ist $L^{2,\Omega}$ ein recht eingeschränkter Raum, insbesondere umfaßt er nicht $\mathcal{E}(\overline{D})$ und noch nicht einmal die konstanten Funktionen. Wir führen daher einen Gewichtsfaktor ein, der diese Eigenschaften herstellt:

Definition 10. Es sei $\alpha > 0$ ein reeller Parameter, dann definieren wir für $0 \leq p, q \leq n$

$$
L^{2,\alpha}_{(p,q)}(D) := \left\{ f \in L^{2,loc}_{p,q}(D) : ||f||_\alpha < \infty \right\}
$$

den *α-gewichteten L^2-Raum zur Metrik* Ω, wobei das Skalarprodukt

$$
(f,g)_\alpha := \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(2\pi)^n} \int\limits_D (-\rho)^\alpha \left\langle f,g\right\rangle_\Omega dV
$$

ist. Γ bezeichnet dabei die Γ-Funktion und die Konstante vor dem Integral kürzen wir meist mit $c_{n,\alpha}$ ab. Ihr Nutzen wird später beim Dimensionsübergang klarer. Mit $||f||_\alpha := (f,f)_\alpha^{1/2}$ bezeichnen wir die zugehörige Norm. Wenn der Grad der beteiligten Differentialformen nicht von Bedeutung ist, schreiben wir für $L^{2,\alpha}_{p,q}$ auch kürzer $L^2_\alpha(D)$ oder nur L^2_α.

Lemma 11. *Für alle $\alpha' \geq \alpha > 0$ gilt*

$$
\mathcal{D}^{(p,q)}(D) \subset \mathcal{E}^{(p,q)}(D) \subset C^0_{(p,q)}(\overline{D}) \subset L^{2,\alpha}_{(p,q)}(D) \subset L^{2,\alpha'}_{(p,q)}(D),
$$

wobei $\mathcal{D}^{(p,q)}(D) := C^\infty_{(p,q),0}(D)$ die Testformen mit kompaktem Träger innerhalb D und $\mathcal{E}^{(p,q)}(D) := C^\infty_{(p,q)}(\overline{D})$ die bis zum Rand glatten Formen in $\overline{D}$ bezeichnet.

Beweis. Wir müssen natürlich nur die dritte und vierte Inklusion beweisen. Dazu sei zunächst $f \in C^0_{(p,q)}(\overline{D})$. Für beliebiges $\alpha > 0$ gilt dann nach Lemma 4

$$
||f||_\alpha^2 = \int\limits_D (-\rho)^{\alpha-1}|f|_\beta^2 \, dl \lesssim \int\limits_D (-\rho)^{\alpha-1} \, dl,
$$

denn $|f|_\beta$ ist beschränkt auf $\overline{D}$. Da $\overline{D}$ kompakt ist und ρ als regulär auf bD vorausgesetzt sind, ist der Wert des Integrals stets endlich, und somit gilt $f \in L^2_\alpha$.

Für den Beweis der verbleibenden Inklusion verwenden wir, daß sich die Norm in $L^2_{\alpha'}$ von der Norm in L^2_α nur um eine Konstante und eine positive Potenz $(-\rho)^{\alpha'-\alpha}$ des Gewichtsfaktors unterscheidet. Da ρ bis zum Rand glatt und damit beschränkt auf $\overline{D}$ ist, können wir den Faktor $(-\rho)^{\alpha'-\alpha}$ nach oben durch eine Konstante abschätzen und erhalten

$$||f||^2_{\alpha'} \lesssim ||f||^2_\alpha,$$

wobei die auftretende Konstante nur von α' und α abhängt, die Inklusion also stetig ist.

1.3 Der $\bar\partial$-Komplex auf $L^2_\alpha(D)$

Definition 12. Auf den Räumen L^2_α betrachten wir $\bar\partial$ im L^2-Sinn als dicht definierten Differentialoperator erster Ordnung. Wir setzen $\bar\partial$ zunächst im Distributionensinn auf L^2_α fort und bilden $\operatorname{dom}\bar\partial$ in L^2_α durch

$$f \in \operatorname{dom}\bar\partial \subset L^2_\alpha(D) \qquad :\Leftrightarrow \qquad f \in L^2_\alpha(D) \quad \text{und} \quad \bar\partial f \in L^2_\alpha(D).$$

Es sei ϑ_α der formal adjungierte Operator zu $\bar\partial$, d. h. es gelte im Distributionensinn

$$(f, \bar\partial\varphi)_\alpha = (\vartheta_\alpha f, \varphi)_\alpha \qquad \text{für alle } f \in L^{2,\alpha}_{p,q},\ \varphi \in \mathcal{D}^{(p,q-1)},$$

und es sei $\bar\partial^*_\alpha$ der in $L^{2,\alpha}_{p,q}$ adjungierte Operator zu $\bar\partial$ im Hilbertraumsinn, also

$$(f, \bar\partial g)_\alpha = (\bar\partial^*_\alpha f, g)_\alpha \qquad \text{für alle } f \in L^{2,\alpha}_{p,q} \cap \operatorname{dom}\bar\partial^*,\ g \in L^{2,\alpha}_{p,q-1} \cap \operatorname{dom}\bar\partial,$$

$$\operatorname{dom}\bar\partial^*_\alpha = \{f \in L^2_\alpha : \forall g \in \operatorname{dom}\bar\partial\ (f, \bar\partial g)_\alpha = (\vartheta_\alpha f, g)_\alpha\}.$$

Um einen expliziten Ausdruck für ϑ_α bzw. $\bar\partial^*_\alpha$ herzuleiten, benötigen wir

Definition 13. Es sei χ eine (p,q)-Form und η die definierende $(1,1)$-Form eines Skalarprodukts $\langle .\,,. \rangle_\eta$. Dann definieren wir das *innere Produkt* $\lrcorner_\eta$ mit χ bezüglich η als

$$\langle \chi \lrcorner_\eta f, g \rangle_\eta := \langle f, \bar\chi \wedge g \rangle_\eta \qquad \text{für alle } f, g.$$

Lemma 14. *Für $f \in L^{2,\alpha}_{0,q}(D)$ gilt*

$$\vartheta_\alpha f = -i\Omega \lrcorner_\Omega \partial f + (n + \alpha - q)\frac{\partial\rho}{(-\rho)} \lrcorner_\Omega f,$$

oder gleichbedeutend

$$\vartheta_\alpha f = -i(\beta - \frac{\gamma}{B}) \lrcorner_\beta \partial f + (n + \alpha - q)\partial\rho \lrcorner_\beta f,$$

wobei $\beta = i\partial\bar\partial\rho$ und $\gamma := i\,\partial\rho\wedge\bar\partial\rho$. Damit ist ϑ_α ein Differentialoperator erster Ordnung, dessen Koeffizienten glatt bis zum Rand sind.

Beweis. Es seien $f \in L^{2;\alpha}_{0,q}$ und $\varphi \in \mathcal{D}_{0,q-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(f, \bar\partial\varphi)_\alpha &= c_{n,\alpha,q} \int\limits_D (-\rho)^\alpha \big\langle f, \bar\partial\varphi \big\rangle_\Omega dV \\
&= \frac{c_{n,\alpha,q} c_q}{(n-q)!} \int\limits_D (-\rho)^\alpha f \wedge \partial\bar\varphi \wedge \Omega^{n-q} \\
&= \frac{c_{n,\alpha,q} c_q}{(n-q)!} \int\limits_D (-\rho)^{n+\alpha-q} f \wedge \partial\bar\varphi \wedge \omega^{n-q} \\
&= \frac{c_{n,\alpha,q} c_q}{(n-q)!} \int\limits_D (n+\alpha-q)(-\rho)^{n+\alpha-q} f \wedge \frac{\partial\rho}{(-\rho)} \wedge \bar\varphi \wedge \omega^{n-q} \\
&\quad\; + \frac{c_{n,\alpha,q} c_q (-1)^q}{(n-q)!} \int\limits_D (-\rho)^{n+\alpha-q} \partial f \wedge \bar\varphi \wedge \omega^{n-q} \\
&= c_{n,\alpha,q} \int\limits_D (-\rho)^\alpha (n+\alpha-q) \big\langle f, \frac{\bar\partial\rho}{(-\rho)} \wedge \varphi \big\rangle_\Omega dV - i c_{n,\alpha,q} \int\limits_D (-\rho)^\alpha \big\langle \partial f, \Omega \wedge \varphi \big\rangle_\Omega dV,
\end{aligned}$$

also ist

$$\vartheta_\alpha f = -i\Omega \lrcorner_\Omega \partial f + (n+\alpha-q) \frac{\partial\rho}{(-\rho)} \lrcorner_\Omega f,$$

und die erste Behauptung ist gezeigt. Weiterhin gilt wegen

$$\big\langle \bar e^1, \bar e^j \big\rangle_\Omega = \frac{(-\rho)}{B} \delta_{1j} = \frac{1}{B} \big\langle \bar e^1, \bar e^j \big\rangle_\beta \qquad \text{bzw.} \qquad \big\langle \bar e^i, \bar e^j \big\rangle_\Omega = \delta_{ij} = \big\langle \bar e^i, \bar e^j \big\rangle_\beta$$

für $i \neq 1$, daß

$$\frac{\partial\rho}{(-\rho)} \lrcorner_\Omega f = \frac{1}{B} \partial\rho \lrcorner_\beta f$$

ist, und daher gilt

$$\begin{aligned}
\Omega \lrcorner_\Omega f &= \left[\frac{B}{(-\rho)} e^1 \wedge \bar e^1 + \sum_{j=2}^n e^j \wedge \bar e^j \right] \lrcorner_\Omega f \\
&= \left[\frac{(-\rho)}{B} e^1 \wedge \bar e^1 + \sum_{j=2}^n e^j \wedge \bar e^j \right] \lrcorner_\beta f \\
&= \left[\sum_{i=1}^n e^i \wedge \bar e^i - \frac{\big|\bar\partial\rho\big|_\beta^2}{B} e^1 \wedge \bar e^1 \right] \lrcorner_\beta f \\
&= \left[\beta - \frac{\gamma}{B} \right] \lrcorner_\beta f,
\end{aligned}$$

woraus sich die zweite Behauptung ergibt.

In der euklidischen Metrik sind die glatten Formen im Definitionsbereich des Operators $\bar{\partial}^*$ durch die Neumannsche Randbedingung $f_t = 0$ charakterisiert. Wir werden feststellen, daß dies in unserer geometrischen Situation nicht der Fall ist. Statt dessen gilt $\mathcal{E} \subset \operatorname{dom} \bar{\partial}_\alpha^*$ für alle $\alpha > 0$. Zu diesem Ergebnis gelangen wir über eine Reihe von Hilfssätzen:

Lemma 15. *Es sei $\alpha > 0$. Dann gilt für alle $f, g \in \mathcal{E}$*

$$(\vartheta_\alpha f, g)_\alpha = (f, \bar{\partial} g)_\alpha.$$

Beweis. Durch partielle Integration erhalten wir zunächst aus den Greenschen Formeln

$$\begin{aligned}
(\vartheta_\alpha f, g)_\alpha - (f, \bar{\partial} g)_\alpha &\approx \int_D \partial\big[(-\rho)^\alpha f \wedge *_\Omega \bar{g}\big] \\
&= \int_D \partial\big[(-\rho)^\alpha f \wedge \bar{g} \wedge \Omega_{n-q}\big] \\
&= \int_D \partial\big[(-\rho)^\alpha f \wedge \bar{g} \wedge \beta^{n-q}\big] + \int_D \partial\big[(-\rho)^{\alpha-1} f \wedge \bar{g} \wedge \partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho \wedge \beta^{n-q-1}\big].
\end{aligned}$$

Das erste Integral ist aufgrund des Stokeschen Satzes gleich 0, denn das entstehende Randintegral verschwindet durch den Gewichtsfaktor $(-\rho)^\alpha$. Das zweite Integral formen wir ein weiteres Mal um:

$$\begin{aligned}
&= \int_D \partial\big[(-\rho)^\alpha \partial(f \wedge \bar{g} \wedge \bar{\partial}\rho) \wedge \beta^{n-q-1}\big] \\
&= 0
\end{aligned}$$

für alle $\alpha > 0$, wiederum nach dem Satz von Stokes, denn man sieht nun, daß der Integrand glatt im Innern ist, und der Faktor $(-\rho)^\alpha$ sorgt erneut dafür, daß das Randintegral keinen Beitrag liefert.

Lemma 16. *Es sei $\alpha > 1$, $f \in L^2_\alpha$, $\vartheta_\alpha f \in L^2_\alpha$ und $g \in \mathcal{E}$. Dann gilt*

$$(\vartheta_\alpha f, g)_\alpha = (f, \bar{\partial} g)_\alpha.$$

Beweis. Wir wählen zu einem reellen Parameter $\varepsilon > 0$ eine Reihe von glatten Hilfsfunktionen $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß $\varphi_\varepsilon(x) \equiv 1$ für $x < -2\varepsilon$ und $\varphi_\varepsilon(x) \equiv 0$ für $x > -\varepsilon$. Es sei zudem gleichmäßig $|\varphi'(x)| \leq K\varepsilon^{-1}$ für eine Konstante K, die von ε unabhängig ist. Wir setzen $\psi_\varepsilon(\zeta) := \varphi_\varepsilon(\rho(\zeta))$. Damit hat ψ_ε kompakten Träger in D. Über $\bar{\partial}\psi_\varepsilon$ wissen wir zumindest noch, daß es Träger in der Menge $M := \{z : 2\varepsilon < (-\rho) < \varepsilon\}$ hat und dort

$$\big|\bar{\partial}\psi_\varepsilon\big|_\Omega \leq |\varphi_\varepsilon'|\big|\bar{\partial}\rho\big|_\Omega \leq \varepsilon^{-1}(-\rho)^{\frac{1}{2}}$$

gilt. Wir verwenden nun ψ_ε als Abschneidefunktion, denn es ist $g\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(D)$, und erhalten

$$(\vartheta_\alpha f, \psi_\varepsilon g)_\alpha = (f, \psi_\varepsilon \bar{\partial} g)_\alpha + (f, \bar{\partial}\psi_\varepsilon \wedge g)_\alpha.$$

Nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz konvergieren $(\vartheta_\alpha f, \psi_\varepsilon g)_\alpha$ gegen $(\vartheta_\alpha f, g)_\alpha$ und $(f, \psi_\varepsilon \bar\partial g)_\alpha$ gegen $(f, \bar\partial g)_\alpha$. Die Behauptung des Lemmas folgt also, falls der letzte Term der rechten Seite für $\varepsilon \to 0$ gegen 0 konvergiert. Dies ist in der Tat der Fall, da

$$\begin{aligned}
(f, \bar\partial\psi_\varepsilon \wedge g)_\alpha &\lesssim ||f||_\alpha^2 \int_D (-\rho)^{\alpha-1} \left|\bar\partial\psi_\varepsilon \wedge g\right|_\Omega^2 dl \\
&\leq ||f||_\alpha^2 \int_M (-\rho)^{\alpha-1} \left|\bar\partial\varphi_\varepsilon\right|^2 \left|\bar\partial\rho \wedge g\right|_\Omega^2 dl \\
&\lesssim ||f||_\alpha^2 ||g||_{L^\infty}^2 \int_{2\varepsilon<(-\rho)<\varepsilon} (-\rho)^{\alpha-1} \varepsilon^{-2} (-\rho) dl \\
&\lesssim \varepsilon^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Da $\alpha > 1$ vorausgesetzt war, ist die Behauptung damit gezeigt.

Lemma 17. *Es sei $\alpha > 1$. Dann gibt es für jedes $f \in \operatorname{dom}\bar\partial$ eine approximierende Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus glatten Funktionen $f_j \in \mathcal{E}(\overline{D})$, so daß gleichzeitig*

$$||f_j - f||_\alpha \to 0 \qquad \textit{und} \qquad ||\bar\partial f_j - \bar\partial f||_\alpha \to 0.$$

Beweis. Die Folge f_j läßt sich in zwei Schritten konstruieren. Zunächst approximieren wir f gleichzeitig mit $\bar\partial f$ durch eine Folge von Formen in $L^2(D)$, und diese werden anschließend mit Hilfe des Hörmander-Friedrichs Lemmas wie in [Hör 65] durch glatte Formen approximiert. Die vollständige Konstruktion ist in [Lam 00] beschrieben.

Lemma 18. *Es sei $\alpha > 1$, es seien $f, g \in L^2_\alpha$, $\vartheta_\alpha f \in L^2_\alpha$, $\bar\partial g \in L^2_\alpha$. Dann gilt $(\vartheta_\alpha f, g)_\alpha = (f, \bar\partial g)_\alpha$. Mit anderen Worten:*

$$f \in \operatorname{dom}\bar\partial_\alpha^* \quad \Longleftrightarrow \quad f \in L^2_\alpha \;\; \textit{und} \;\; \vartheta_\alpha f \in L^2_\alpha.$$

Beweis. Wir approximieren g wie in Lemma 17 durch glatte Formen g_j, so daß $||f_j - f||_\alpha \to 0$ und $||\bar\partial f_j - \bar\partial f||_\alpha \to 0$. In der Zerlegung

$$(\vartheta_\alpha f, g)_\alpha - (f, \bar\partial g)_\alpha = (\vartheta_\alpha f, g - g_j)_\alpha - (f, \bar\partial g - \bar\partial g_j)_\alpha + (\vartheta_\alpha f, g_j)_\alpha - (f, \bar\partial g_j)_\alpha$$

heben sich die letzten beiden Terme nach Lemma 16 weg. Die anderen beiden Terme konvergieren nach Konstruktion von g_j gegen 0 für $j \to \infty$, also folgt die gewünschte Gleichheit.

Für glatte Formen erhalten wir sogar

Lemma 19. *Es sei $\alpha > 0$. Dann gilt $\mathcal{E}(\overline{D}) \subset \operatorname{dom}\bar\partial_\alpha^*$, also für alle $f \in \mathcal{E}(\overline{D})$ und $g \in \operatorname{dom}\bar\partial$ gilt*

$$(\vartheta_\alpha f, g)_\alpha = (f, \bar\partial g)_\alpha.$$

Beweis. Für glattes f ist auch $\vartheta_\alpha f$ wiederum glatt und somit in L^2_α. Für $\alpha > 1$ gilt die Gleichung damit nach Lemma 18. Es sei nun $\alpha > 0$ beliebig. Für $\alpha' \geq \alpha$ gilt $L^2_\alpha \subset L^2_{\alpha'}$, also sicherlich $g, \bar{\partial} g \in L^2_{\alpha'}$. Außerdem hat $\vartheta_{\alpha'} f$ stets glatte Koeffizienten, also ist $\vartheta_{\alpha'} f \in L^2_{\alpha'}$ für alle $\alpha' \geq \alpha$. Aus Lemma 18 wissen wir dann

$$(\vartheta_{\alpha'} f, g)_{\alpha'} - (f, \bar{\partial} g)_{\alpha'} = 0 \qquad \text{für alle } \alpha' > \max(\alpha, 1).$$

Wir betrachten nun die linke Seite der Gleichung für festes f und g als Funktion $\mathcal{F}$ der einen Variable α':

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\alpha') &= c_{n,q,\alpha'} (\vartheta_{\alpha'} f, g)_{\alpha'} - (f, \bar{\partial} g)_{\alpha'} \\ &= \int_D (-\rho)^{\alpha'} \left[\left\langle \partial f, \Omega \wedge g \right\rangle_\Omega + (n + \alpha' - q) \left\langle f, \bar{\partial} \wedge g \right\rangle_\Omega - \left\langle f, \bar{\partial} g \right\rangle_\Omega \right] dV.\end{aligned}$$

Wenn wir auch komplexe Werte für α' zulassen, stellen wir fest, daß diese Funktion für alle α' mit $Re\ \alpha' > 0$ definiert ist und es sich dort um eine in α' holomorphe Funktion handelt. Da $\mathcal{F}$ jedoch auf der positiven reellen Achse ab einem Punkt identisch verschwindet, muß im ganzen rechten Halbraum $\mathcal{F} \equiv 0$ gelten. Insbesondere sind alle Terme für $0 < \alpha \leq 1$ definiert, d. h. es gilt auch

$$(\vartheta_\alpha f, g)_\alpha - (f, \bar{\partial} g)_\alpha = 0.$$

Wie im ersten Abschnitt beschrieben bilden wir den Laplace-Beltrami-Operator:

Definition 20. Es sei $\Box_\alpha$ der *Laplace-Beltrami-Operator* in L^2_α, d. h.

$$\Box_\alpha := (\bar{\partial}^*_\alpha + \bar{\partial})^2 = \bar{\partial}^*_\alpha \bar{\partial} + \bar{\partial} \bar{\partial}^*_\alpha$$

auf dem Definitionsgebiet

$$\operatorname{dom} \Box_\alpha := \{ f \in \operatorname{dom} \bar{\partial} \cap \operatorname{dom} \bar{\partial}^* \ : \ \bar{\partial} f \in \operatorname{dom} \bar{\partial}^*_\alpha \text{ und } \bar{\partial}^*_\alpha f \in \ \operatorname{dom} \bar{\partial} \} \subset L^2_\alpha.$$

Dann erhalten wir als einen zentralen Unterschied von $\Box_\alpha$ zum euklidischen Laplace-Beltrami-Operator $\Box$:

Lemma 21. *Für alle $\alpha > 0$ gilt*

$$\mathcal{E} \subset \operatorname{dom} \Box_\alpha.$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 19, weil für jedes $f \in \mathcal{E}$ natürlich auch $\bar{\partial} f \in \mathcal{E}$.

1.4 Zulässige Kerne in gewichteten Räumen

Wir wollen die Theorie zulässiger Kerne nun auf die Räume L^2_α übertragen. Wegen des zusätzlichen Gewichtsfaktors und der anisotropen Metrik ist jedoch der Zusammenhang zwischen dem Typ des Kerns und den Eigenschaften bezüglich Integrierbarkeit und Regularität etwas unübersichtlicher. Im folgenden betrachten wir daher nur Kerne vom Doppeltyp $(q, 0; 0, q')$, d. h. Operatoren, die $(0, q)$-Formen auf $(0, q')$-Formen abbilden.

Definition 22. Es sei $\mathcal{A}(\zeta, z)$ ein zulässiger Kern vom Typ λ. Dann ist seine Wirkung auf Formen im Raum L^2_α gegeben durch

$$Af(z) := (f, \overline{\mathcal{A}})_\alpha(z) = c_{n,\alpha} \int\limits_D (-\rho)^\alpha \big\langle f(\zeta), \overline{\mathcal{A}(\zeta, z)} \big\rangle_\Omega \, dV(\zeta).$$

Lemma 23. *Es sei $\mathcal{A}(\zeta, z)$ ein zulässiger Kern vom Typ λ. Dann definiert $\mathcal{A}$ auf dem Raum L^2_α einen Operator A, der aus zwei zulässigen Kernen $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}''$ vom Typ mindestens $\lambda + 2\alpha$ bzw. $\lambda + 2\alpha - 2$ besteht. Der Kern $\mathcal{A}''$ hängt dabei nur von $\partial\rho \wedge \mathcal{A}$ ab.*

Beweis. Aufgrund unserer Charakterisierung von Ω und dV in Lemma 1 und Gleichung (9) können wir die Definition schreiben als

$$Af(z) \approx \int\limits_D (-\rho)^\alpha \big\langle f, \overline{\mathcal{A}} \big\rangle_\beta \, dl + \int\limits_D (-\rho)^{\alpha-1} \big\langle \bar\partial\rho \wedge f, \overline{\partial\rho \wedge \mathcal{A}} \big\rangle_\beta \, dl.$$

Die entstehenden Ausdrücke verwandeln wir in Kerne $\mathcal{A}'$ bzw. $\mathcal{A}''$ um, die bezüglich der Levimetrik β gebildet werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(\zeta, z) &= (-\rho)^\alpha \mathcal{A}(\zeta, z), \\ \mathcal{A}''(\zeta, z) &= (-\rho)^{\alpha-1} \, \bar\partial\rho \lrcorner_\beta \partial\rho \wedge \mathcal{A}(\zeta, z). \end{aligned}$$

Da wir $\mathcal{A}$ als $(q, 0)$-Form bzgl. ζ vorausgesetzt haben, verbleibt in $\partial\rho \wedge \mathcal{A}$ nur der Tangentialanteil von $\mathcal{A}$, der unter Umständen einen höheren Typ als der Gesamtkern hat. Wir führen daher einen angepaßten Begriff von Typ ein:

Definition 24. Es sei $\mathcal{A}(\zeta, z)$ ein zulässiger Kern. Dann nennen wir $\mathcal{A}$ *vom α-Typ* (μ, ν) und schreiben $\mathcal{A}_{(\mu,\nu)}$, wenn die Wirkung von $\mathcal{A}$ in L^2_α in obiger Zerlegung gegeben wird durch Kerne $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}''$ vom Typ μ bzw. ν, d. h.

$$\begin{aligned} (-\rho)^\alpha \mathcal{A}(\zeta, z) \qquad & \text{ist vom Typ } \mu, \\ (-\rho)^{\alpha-1} \partial\rho \wedge \mathcal{A}(\zeta, z) \qquad & \text{ist vom Typ } \nu. \end{aligned}$$

Falls der Term $(-\rho)^{\alpha-1}\partial\rho \wedge \mathcal{A}$ identisch verschwindet, setzen wir $\nu = \infty$.

Um derartige Typen zu vergleichen gehen wir komponentenweise vor, d. h. wir nennen (μ, ν) *größer als* (μ', ν'), falls $\mu > \mu'$ und $\nu > \nu'$, und schreiben dafür auch $(\mu, \nu) > (\mu', \nu')$.

Zu beachten ist: Der so definierte α-Typ hängt insbesondere von α ab, auch wenn $\mathcal{A}(\zeta, z)$ selbst dies nicht tut. Falls der Raum L^2_α, in dem der Operator gebildet werden soll, aus dem Zusammenhang klar ist, schreiben wir auch kürzer „$\mathcal{A}$ *sei vom Typ* (μ, ν)“.

In elementaren Summanden, wie sie durch die lokale Darstellung zulässiger Kerne gegeben sind, enthält nur der isotrope E_m-Anteil Differentiale, so daß auch nur dieser unterschiedliches Verhalten in tangentialer als in nicht-tangentialer Richtung zeigen kann. Wir definieren daher:

Definition 25. Es sei E_m ein isotroper Kern von Ordnung m. Dann nennen wir E_m *von Ordnung* (m, m') und schreiben $E_{(m,m')}$, wenn $\partial\rho \wedge E_m$ isotrop von Ordnung m' ist.

Beispiel. Ein Kern, der durch diese anisotrope Charakterisierung besser beschrieben wird als durch den zulässigen Typ allein, ist z. B. der folgende:

$$\mathcal{K}(\zeta, z) = \frac{\partial_\zeta \bar{v}}{\bar{v}^{n+\alpha}}.$$

$\mathcal{K}$ allein hat zunächst Typ $-2\alpha + 2$, d. h. nach Lemma 23 wissen wir nur, daß $\mathcal{K}$ auf L^2_α Operatoren von den Typen 2 und 0 induziert. Tatsächlich gilt jedoch, daß

$$\mathcal{K}(\zeta, z) = \frac{\partial\rho}{\bar{v}^{n+\alpha}} + \frac{\mathcal{E}_1}{\bar{v}^{n+\alpha}},$$

so daß wir $\mathcal{K}$ als vom Typ $(2, 1)$ identifizieren können. Indem wir $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}''$ einzeln betrachten, steht uns somit die gesamte Theorie für Kerne vom Typ > 0 zur Verfügung. Anders formuliert: $\partial_\zeta \bar{v}$ für sich genommen ist zwar nur von der Ordnung 0, aber anisotrop betrachtet ist er wegen $\partial_\zeta \bar{v} = \partial\rho + \mathcal{E}_1$ ein $\mathcal{E}_{(0,1)}$-Term.

Die beiden Definitionen 24 und 25 können wir zu einer direkten Formel des anisotropen Typs (μ, ν) kombinieren:

Lemma 26. *Der isotrope Anteil eines zulässigen Kerns $\mathcal{A}_{(\mu,\nu)}$ in lokaler Darstellung sei von Ordnung (m, m'). Dann gilt*

$$\mu = 2n + 2 + \min(2, (t - \gamma - \delta - \alpha)) - 2(t - \gamma - \delta - \alpha) + m,$$
$$\nu = 2n + 2 + \min(2, (t - \gamma - \delta - \alpha + 1)) - 2(t - \gamma - \delta - \alpha + 1) + m'.$$

Offensichtlich gilt stets $\nu \geq \mu - 2 + (m' - m)$. In den meisten Fällen, die praktisch auftauchen, gilt die Gleichheit.

Bemerkung. Für das Abbildungsverhalten eines Operators sind beide Teilkerne gleichberechtigt. Die Sätze über zulässige Operatoren gelten damit, wenn sie für beide Teilkerne gelten, im allgemeinen also dann, wenn sie für Kerne gelten, deren Typ das Minimum der Komponenten λ und μ ist.

Definition 27. Es sei $\mathcal{A}$ zulässig vom Typ (μ, ν), dann nennen wir $\mathcal{A}$ *zulässig vom Typ* (λ), wenn $\min(\mu, \nu) = \lambda$.

Dadurch, daß bei der Integration der nicht-tangentiale Anteil eines Kerns ein höheres Gewicht erhält als der tangentiale, erhalten wir ein etwas besseres Ergebnis über den ∂-Operator als bei reiner Differentiation:

Lemma 28. *Es sei $\mathcal{A}$ ein zulässiger Kern vom Typ (μ, ν), dann ist $\partial_\zeta \mathcal{A}$ ebenfalls zulässig und vom Typ* $(\min(\nu, \mu - 1), \nu - 1)$.

Beweis. Wir zerlegen $\mathcal{A} = e^1 \wedge \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, wobei $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ ohne e^1-Differential sind. Dann ist $(-\rho)^\alpha e^1 \wedge \mathcal{A}_1$ vom Typ μ und $(-\rho)^{\alpha-1}\mathcal{A}_2$ vom Typ ν. Den ∂-Operator schreiben wir bezüglich der Basis $e^1, \dots, e^n$ von $(1,0)$-Formen und den dualen Vektorfeldern $L_1, \dots, L_n$ als

$$\begin{aligned}\partial_\zeta \mathcal{A} &= \sum_{i=1}^n e^i \wedge L_i \mathcal{A} \\ &= e^1 \wedge L_1 \mathcal{A}_2 + \sum_{j=2}^n e^j \wedge e^1 \wedge L_j \mathcal{A}_1 + \sum_{j=2}^n e^j \wedge L_j \mathcal{A}_2.\end{aligned}$$

Wir wissen, daß die Vektorfelder L_j für $j \geq 2$ den Typ nur um 1 verringern, da sie holomorph tangential sind. L_1 reduziert den Typ eines Kernes um bis zu 2, falls das Ergebnis überhaupt zulässig ist. $(-\rho)L_1$ reduziert den Typ jedoch gar nicht.

Damit überprüft man, daß die drei Summanden die Typen (ν, ∞), $(\mu{-}1, \infty)$ und $(\nu', \nu{-}1)$ haben, wobei $\nu' \geq \nu$ ist. Der Gesamttyp des Kerns ist jeweils das Minimum der Einzeltypen, also $(\min(\nu, \mu-1), \nu-1)$, wie zu zeigen war.

Beispiel. Es sei

$$\mathcal{N}(\zeta, z) = \frac{1}{\overline{v}^{n+\alpha-1}}.$$

Dann ist $\mathcal{N}(\zeta, z)$ vom Typ $(4,2)$, also insgesamt (2). Dadurch wissen wir, daß $\partial_\zeta \mathcal{N}$ vom Typ $(2,1)$, also (1), ist, nicht nur vom Typ (0). In der Tat ist $\partial_\zeta \mathcal{N}$ bis auf eine Konstante gerade der Kern $\mathcal{K}$ aus dem Beispiel von Seite 92.

Analog erhalten wir einen etwas weniger guten Satz über den zu ∂ adjungierten Operator.[8]

Lemma 29. *Es sei $\mathcal{A}$ zulässig vom Typ (μ, ν). Dann ist $\bar{\partial}_\alpha^* \mathcal{A}$ ebenfalls zulässig und vom Typ* $(\min(\mu{-}1, \nu), \min(\mu{-}2, \nu{-}1))$.

Beweis. Es sei $\mathcal{A}$ wie beim Beweis von Lemma 28 zerlegt in $e^1 \wedge \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ mit $e^1 \wedge \mathcal{A}_1$ vom Typ (μ, ∞) und $\mathcal{A}_2$ vom Typ (ν', ν) mit $\nu' \geq \nu + 1$.

Den Operator ∂_ζ^* wenden wir mit Hilfe der Formel aus Lemma 14 an:

$$\partial_\alpha^* \mathcal{A} = -i(\beta - \frac{\gamma}{B}) \lrcorner_\beta \bar{\partial} \mathcal{A} + (n + \alpha - q) \bar{\partial}\rho \lrcorner_\beta \mathcal{A},$$

für $\mathcal{A}$ vom Typ $(q, 0; r, s)$. Dabei ist $\bar{\partial}\rho \lrcorner_\beta \mathcal{A}_2 = 0$ wegen des Fehlens von e^1 in $\mathcal{A}_2$. Die verbleibenden Terme prüfen wir einzeln:

$$\bar{\partial}\rho \lrcorner_\beta e^1 \wedge \mathcal{A}_1 = \mathcal{E}_0 \mathcal{A}_1$$

ist mindestens vom Typ $(\mu, \mu{-}2)$. Weiterhin zerlegen wir

$$\bar{\partial}(e^1 \wedge \mathcal{A}_1) = \bar{e}^1 \wedge e^1 \wedge \bar{L}_1 \mathcal{A}_1 + \sum_{k=2}^n \bar{e}^k \wedge e^1 \wedge \bar{L}_k \mathcal{A}_1.$$

[8] Das unterschiedliche Verhalten liegt daran, daß der ∂-Operator bei Anwendung auf nicht-tangentiale Kerne wiederum nur auf nicht-tangentiale Kerne abbildet, während durch den ∂^* auf diese Weise tangentiale Kerne entstehen können, die gegen einen niedrigeren Gewichtsfaktor integriert werden.

Weil wir $\frac{1}{i}(\beta - \frac{\gamma}{B}) = \frac{(-\rho)}{B} e^1 \wedge \bar{e}^1 + \sum_{j=2}^n e^j \wedge \bar{e}^j$ schreiben können, wie im Beweis von Lemma 28, folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}(\beta - \frac{\gamma}{B}) \lrcorner_\beta \bar{\partial}(e^1 \wedge \mathcal{A}_1) &= \frac{(-\rho)}{B} e^1 \wedge \bar{e}^1 \lrcorner_\beta \left[\bar{e}^1 \wedge e^1 \wedge \bar{L}_1 \mathcal{A}_1\right] \\ &\quad + \sum_{j=2}^n e^j \wedge \bar{e}^j \lrcorner_\beta \left[\sum_{k=2}^n \bar{e}^k \wedge e^1 \wedge L_k \mathcal{A}_1\right] \\ &= \mathcal{E}_0(-\rho)\bar{L}_1\mathcal{A}_1 + \mathcal{E}_0 e^1 \wedge \mathcal{A}_1',\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{A}_1'$ aus $e^k \lrcorner_\beta L_k \mathcal{A}_1$ entsteht und der zweite Kern daher Typ $(\mu{-}1, \infty)$ hat. Der erste Kern ist vom Typ (μ', μ) mit $\mu' \geq \mu + 1$

$$\frac{1}{i}(\beta - \frac{\gamma}{B}) \lrcorner_\beta \bar{\partial}\mathcal{A}_2 = \sum_{j=2}^n e^j \wedge \bar{e}^j \lrcorner_\beta \bar{e}^1 \wedge \bar{L}_1 \mathcal{A}_2 + \sum_{k=2}^n \bar{e}^k \wedge \bar{L}_k \mathcal{A}_2$$

Der erste Term ist gleich 0, so daß es auch keine Rolle spielt, daß $\bar{L}_1\mathcal{A}_2$ unter Umständen nicht zulässig hätte gewesen sein können. Der Typ des zweiten Kerns ist gegenüber dem Typ von $\mathcal{A}_2$ um jeweils 1 verringert, also

$$= \mathcal{E}_0 \mathcal{A}_2'$$

mit $\mathcal{A}_2'$ vom Typ $(\nu'{-}1, \nu{-}1)$. Indem wir die drei Summanden addieren, ergibt sich ein Gesamttyp von $(\min(\nu, \mu{-}1), \min(\mu{-}2, \nu{-}1))$ und damit die Behauptung.

1.5 Abbildungsverhalten zulässiger Kerne zwischen gewichteten Räumen

Der anisotrope Typ aus Definition 24 ist gut geeignet, das Abbildungsverhalten der Kerne zu studieren, wenn nur die Gewichtung im Ausgangsraum, nicht aber die Gewichtung im Zielraum eine Rolle spielt, wie dies etwa für C^∞- und C^k-Regularität der Fall ist. Wenn wir jedoch betrachten möchten, wie diese Kerne auf Formen in gewichteten L^2-Räumen wirken, und in welchen L^2_α ihr Bild liegt, dann müssen wir auch das Gewicht und die Anisotropie des Bildraumes einfließen lassen. Wir verwenden dazu zunächst eine Abwandlung des Youngschen Lemmas für gewichtete L^2-Räume. Der Einfachheit halber verzichten wir auf die Form mit allgemeinen Maß- und L^p-Räumen, und wir gehen durchgehend von $\mathcal{A}$ in lokaler Darstellung aus mit

$$|\mathcal{A}(\zeta, z)| \lesssim \frac{(-r)^\gamma(-\rho)^\delta |E_m|}{|v|^t \mathrm{P}^{t_0}}.$$

Als Hilfsmittel definieren wir isotrope Räume mit Gewichten:

Definition 30. Es sei $L^2_{\beta;\alpha}(D)$ der mit $(-\rho)^\alpha$ gewichtete L^2-Raum bezüglich der Norm β, d. h. wir definieren

$$||f||^2_{\beta;\alpha} := \int_D (-\rho)^\alpha \langle f, f \rangle_\beta dl$$

und

$$L^2_{\beta;\alpha}(D) := \{f \,:\, ||f||_{\beta;\alpha} < \infty\}.$$

Dann gilt das folgende Ergebnis:

Lemma 31. *Es sei $\mathcal{K}(\zeta, z)$ meßbar und*

- $(-r)^{\frac{\kappa}{2}} \int\limits_D (-\rho)^{-\frac{\vartheta}{2}} |\mathcal{K}(\zeta, z)|_\beta dl(\zeta) < M$ *für fast alle z,*
- $(-\rho)^{-\frac{\vartheta}{2}} \int\limits_D (-r)^{\frac{\kappa}{2}} |\mathcal{K}(\zeta, z)|_\beta dl(z) < M$ *für fast alle ζ.*

Dann ist der durch $\mathcal{K}$ mittels $Kf := \int\limits_D \langle f, \overline{\mathcal{K}}\rangle_\beta dl(\zeta)$ gegebene Operator stetig

$$K : L^2_{\beta;\vartheta'}(D) \to L^2_{\beta;\kappa'}(D)$$

für alle $\vartheta' \leq \vartheta$ und $\kappa' \geq \kappa$.

Beweis. Aus dem Youngschen Lemma I 45 folgt zunächst, daß der Operator

$$K' : f \mapsto \int\limits_D (-r)^{\frac{\vartheta}{2}} (-\rho)^{-\frac{\kappa}{2}} \langle f, \overline{\mathcal{K}}\rangle_\beta dl(\zeta)$$

von $L^2(D)$ nach $L^2(D)$ abbildet. Es sei nun $f \in L^2_{\beta;\vartheta}$. Dann ist $\hat{f} := (-\rho)^{\frac{\vartheta}{2}} f \in L^2$, also auch $K'\hat{f}$ in L^2. Damit hat $(-r)^{-\frac{\kappa}{2}} K'\hat{f}$ noch die gewünschte Integrierbarkeitseigenschaft, um im Raum $L^2_{\beta;\kappa}$ zu liegen. Aus den Formeln für K' und K folgt, daß

$$(-r)^{-\frac{\kappa}{2}} K'\hat{f} = \int\limits_D \langle f, \overline{\mathcal{K}}\rangle_\beta dl(\zeta) = Kf.$$

Damit ist gezeigt, daß $K : L^2_{\beta;\vartheta}(D) \to L^2_{\beta;\kappa}(D)$. Die anderen Fälle folgen hieraus, da jeder Raum $L^2_{\beta;\alpha}$ stetig eingebettet ist in alle $L^2_{\beta;\alpha'}$ mit $\alpha' \geq \alpha$.

Das Kriterium von Lemma 31 ist nur die absolute Integrierbarkeit des aus $\mathcal{K}$ gewonnenen Kernes $(-r)^{\frac{\kappa}{2}}(-\rho)^{-\frac{\vartheta}{2}}\mathcal{K}$, um das Youngsche Lemma anwenden zu können. Falls nun $\mathcal{K}$ selbst bereits eine genügend hohe Potenz von $(-\rho)$ enthält, so daß kein negativer Exponent verbleibt und der abzuschätzende Kern zulässig ist, könnten wir auf unsere Ergebnisse über zulässige Kerne zurückgreifen, insbesondere auf Satz I 62, der uns die absolute Integrierbarkeit von Kernen mit positivem Typ sichert.

In der Tat können wir zeigen, daß dies für alle zulässigen Operatoren der Fall ist, die mit Hilfe des α-Skalarprodukts gebildet werden:

Satz 32. *Es sei $\alpha > 1$ und $\mathcal{A}$ ein zulässiger Kern, so daß*

$$\mathcal{A}(\zeta, z) \text{ vom } \alpha\text{-Typ } (\mu, \nu) \text{ und}$$
$$\bar{\partial} r \wedge \mathcal{A}(\zeta, z) \text{ vom } \alpha\text{-Typ } (\mu', \nu') \text{ ist.}$$

Dann ist der zugehörige Operator $Af := (f, \overline{\mathcal{A}})_\alpha$ stetig

$$A : L^2_\vartheta(D) \to L^2_\kappa(D)$$

für $1 \leq \vartheta \leq 2\alpha - 1$, $\kappa \geq 1$, falls

$$\vartheta - \kappa < \mu, \quad \vartheta - \kappa < \nu + 1, \quad \vartheta - \kappa < \mu' - 1 \quad \text{und} \quad \vartheta - \kappa < \nu'.$$

Beweis. Zunächst übersetzen wir die Aussage des Satzes, so daß wir Lemma 31 anwenden können. Es sei $f \in L^2_\vartheta$. Dann müssen wir zeigen, daß die Norm

$$\begin{aligned} ||Af||^2_\kappa &\approx \left[\int\limits_D (-r)^\kappa |Af(z)|^2_\beta dl(z) + \int\limits_D (-r)^{\kappa-1} \left|\bar{\partial} r \wedge Af(z)\right|^2_\beta dl(z) \right] \\ &\approx \; ||Af(z)||^2_{\beta;\kappa} + ||\bar{\partial} r \wedge Af(z)||^2_{\beta;\kappa-1} \end{aligned} \tag{33}$$

beschränkt ist. Dazu zerlegen wir A und $\bar{\partial} r \wedge A$ weiter zu

$$\begin{aligned} Af(z) &\approx \int \left\langle f, \overline{(-\rho)^\alpha \mathcal{A}} \right\rangle_\beta dl(\zeta) + \int \left\langle \bar{\partial}\rho \wedge f, \overline{(-\rho)^{\alpha-1} \partial\rho \wedge \mathcal{A}} \right\rangle_\beta dl(\zeta) \\ \bar{\partial} r \wedge Af(z) &\approx \int \left\langle f, \overline{(-\rho)^\alpha \bar{\partial} r \wedge \mathcal{A}} \right\rangle_\beta dl(\zeta) + \int \left\langle \bar{\partial}\rho \wedge f, \overline{(-\rho)^{\alpha-1} \partial\rho \wedge \bar{\partial} r \wedge \mathcal{A}} \right\rangle_\beta dl(\zeta), \end{aligned}$$

also gilt

$$||Af||^2_\kappa \;\; \lesssim \;\; ||K_1 f||^2_{\beta;\kappa} + ||K_2\, \bar{\partial}\rho \wedge f||^2_{\beta;\kappa} + ||K_3 f||^2_{\beta;\kappa-1} + ||K_4\, \bar{\partial}\rho \wedge f||^2_{\beta;\kappa-1}, \tag{34}$$

wobei die Operatoren K_1 bis K_4 bezüglich β wie in Lemma 31 gebildet werden aus den Kernen

$$\mathcal{K}_1 := (-\rho)^\alpha \mathcal{A}, \qquad \mathcal{K}_2 := (-\rho)^{\alpha-1} \partial\rho \wedge \mathcal{A},$$
$$\mathcal{K}_3 := (-\rho)^\alpha \bar{\partial} r \wedge \mathcal{A}, \qquad \mathcal{K}_4 := (-\rho)^{\alpha-1} \partial\rho \wedge \bar{\partial} r \wedge \mathcal{A}.$$

Für jeden Operator möchten wir Lemma 31 mit passendem Gewichtsfaktor anwenden. Daß $f \in L^2_\vartheta$ ist, bedeutet zunächst

$$f \in L^2_{\beta;\vartheta} \qquad \text{und} \qquad \bar{\partial}\rho \wedge f \in L^2_{\beta;\vartheta-1}.$$

Wir zeigen nun von den Summanden in (34) einzeln, daß sie in den richtigen Normen beschränkt sind, also

$$K_1 : L^2_{\beta;\vartheta}(D) \to L^2_{\beta;\kappa}(D), \qquad K_2 : L^2_{\beta;\vartheta-1}(D) \to L^2_{\beta;\kappa}(D),$$
$$K_3 : L^2_{\beta;\vartheta}(D) \to L^2_{\beta;\kappa-1}(D), \qquad K_4 : L^2_{\beta;\vartheta-1}(D) \to L^2_{\beta;\kappa-1}(D).$$

Dazu benötigen wir die in Lemma 31 geforderten Abschätzungen für passende Gewichte. Diese entsprechen der gleichmäßigen Integrierbarkeit in beiden Variablen für die Kerne

$$\mathcal{K}_1' := (-r)^{\frac{\kappa}{2}}(-\rho)^{\alpha-\frac{\vartheta}{2}}\mathcal{A} \qquad \text{und} \quad \mathcal{K}_2' := (-r)^{\frac{\kappa}{2}}(-\rho)^{\alpha-1-\frac{\vartheta-1}{2}}\partial\rho\wedge\mathcal{A},$$

$$\mathcal{K}_3' := (-r)^{\frac{\kappa-1}{2}}(-\rho)^{\alpha-\frac{\vartheta}{2}}\bar{\partial}r\wedge\mathcal{A} \quad \text{und} \quad \mathcal{K}_4' := (-r)^{\frac{\kappa-1}{2}}(-\rho)^{\alpha-1-\frac{\vartheta-1}{2}}\bar{\partial}r\wedge\partial\rho\wedge A.$$

Der Beweis von Satz 32 ist somit vollendet, falls wir zeigen können, daß jeder dieser Kerne zulässig vom Typ > 0 ist. Da die Voraussetzungen an κ und ϑ sicherstellen, daß durch die zusätzlichen Faktoren keine negativen Potenzen der Randfunktion entstehen, folgt die Zulässigkeit von $\mathcal{K}_1'$ bis $\mathcal{K}_4'$ schon aus der von $\mathcal{A}$. Es bleibt zu zeigen:

Lemma 35. *Die zulässigen Kerne $\mathcal{K}_1'$ bis $\mathcal{K}_4'$ haben jeweils echt positiven Typ.*

Beweis. Wir nehmen die Kerne jeweils in lokaler Darstellung an, also

$$|\mathcal{A}| = \frac{(-r)^{\gamma}(-\rho)^{\delta}|E_m|}{|v|^t \mathrm{P}^{t_0}}. \tag{36}$$

Der Beweis verläuft für die vier Fälle beinahe identisch, es gibt nur kleine Unterschiede in den Gewichtsfaktoren und den Differentialen. Charakteristisch ist dabei, daß die Kerne $\mathcal{K}_3'$ und $\mathcal{K}_4'$ nur ein geringeres Gewicht aus der Norm im Zielraum erhalten, dafür aber ein zusätzliches $\bar{\partial}r$-Differential auftaucht, also nur der in z tangentiale Anteil des Ausgangskern eine Rolle spielt. Analog erhalten $\mathcal{K}_2'$ und $\mathcal{K}_4'$ ein niedrigeres Gewicht im Ursprungsraum, dafür jedoch ein zusätzliches $\partial\rho$-Differential.

Wir zeigen zunächst ausführlich die Aussage für $\mathcal{K}_1'$:

- Nach Voraussetzung hat $(-\rho)^{\alpha}\mathcal{A}$ Typ μ, also

  $$\mu = 2n + \min(2, t') - 2t' - 2t_0 + m, \tag{37}$$

  wobei wir $t' := t - \alpha - \gamma - \delta$ setzen. Den Typ von $\mathcal{K}_1'$ nennen wir $\hat{\mu}$, er berechnet sich als

  $$\hat{\mu} = 2n + \min(2, t' + \frac{\vartheta-\kappa}{2}) - 2(t' + \frac{\vartheta-\kappa}{2}) - 2t_0 + m. \tag{38}$$

  Falls $t' \geq 2$ und $t' + \frac{\vartheta-\kappa}{2} \geq 2$ gilt, dann ist das Minimum in (37) und (38) jeweils 2, und wir erhalten durch Bilden der Differenz beider Gleichungen

  $$\hat{\mu} = \mu - (\vartheta - \kappa).$$

  Falls $t' \geq 2$ und $t' + \frac{\vartheta-\kappa}{2} < 2$ gilt, erhalten wir

  $$\hat{\mu} = \mu + (t' - 2) - \frac{\vartheta-\kappa}{2}.$$

  Für $t' < 2$ erhalten wir für den Fall $t' + \frac{\vartheta-\kappa}{2} \geq 2$

  $$\hat{\mu} = \mu + 2 - t' - (\vartheta - \kappa),$$

und im Fall $t' + \frac{\vartheta-\kappa}{2} < 2$, daß

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \mu - \frac{\vartheta - \kappa}{2}. \\ &> \mu - (\vartheta - \kappa).\end{aligned}$$

Wie man sieht ist es in allen drei Fällen ausreichend, $\vartheta - \kappa < \mu$ zu wählen, damit $\mathcal{K}_1'$ echt positiven Typ hat.

- Die Rechnungen für die anderen Kerne verlaufen analog. Wir untersuchen noch für $\mathcal{K}_3'$ den Fall der stärksten Einschränkung:

  Nach Voraussetzung hat $(-\rho)^\alpha \bar{\partial} r \wedge \mathcal{A}$ Typ ν', also

$$\mu' = 2n + \min(2, t') - 2t' - 2t_0 + m',$$

  wobei m' die Ordnung des isotropen Anteils $\bar{\partial} r \wedge \mathcal{E}_m$ bezeichnet und wir wiederum $t' := t - \alpha - \gamma - \delta$ setzen. Den Typ von $\mathcal{K}_3'$ nennen wir $\hat{\mu}'$, er berechnet sich als

$$\hat{\mu}' = 2n + \min(2, t' + \frac{\vartheta - (\kappa - 1)}{2}) - 2(t' + \frac{\vartheta - (\kappa - 1)}{2}) - 2t_0 + m'.$$

  Wir betrachten nur den Fall von $t' \geq 2$ und $t' + \frac{\vartheta - (\kappa-1)}{2} \geq 2$. Dann erhalten wir wie zuvor aus der Differenz der Typgleichungen

$$\hat{\mu}' = \mu' - (\vartheta - \kappa + 1).$$

  Dies ist der einzige Fall, in dem eine Voraussetzung „Typ > 0“ nicht genügen würde, um sicherzustellen, daß ein Raum L^2_ϑ auf sich selbst abgebildet wird.[9]

- Insgesamt erhalten wir als Bedingungen, um echt positive Typen für die Kerne $\mathcal{K}_2'$ bis $\mathcal{K}_4'$ zu sichern:

  $\mathcal{K}_1'$ hat Typ > 0, falls $\vartheta - \kappa < \mu$,

  $\mathcal{K}_2'$ hat Typ > 0, falls $\vartheta - \kappa < \nu + 1$,

  $\mathcal{K}_3'$ hat Typ > 0, falls $\vartheta - \kappa < \mu' - 1$,

  $\mathcal{K}_4'$ hat Typ > 0, falls $\vartheta - \kappa < \nu'$,

und die Voraussetzungen des Satzes sind gerade so gewählt, daß diese Beziehungen erfüllt sind.

Als einfache Konsequenzen erhalten wir:

[9] Der Grund hierfür ist, daß der Operator K_3 gerade derjenige Anteil von A ist, der nicht-tangentiale auf tangentiale Formen abbildet, also Formen, die nur einer schwächeren Bedingung genügen müssen, um in L^2_ϑ zu liegen, auf Formen, die ein stärkeres Kriterium erfüllen müssen, um in L^2_ϑ zu sein.

Korollar 39. *Es sei $\mathcal{A}$ zulässig vom α-Typ $(\mu,\nu) > (0,-1)$ und $\bar{\partial}r \wedge \mathcal{A}$ sei vom α-Typ $(\mu',\nu') > (1,0)$. Dann ist der zugehörige Operator stetig*

$$A : L^2_\alpha(D) \to L^2_\alpha(D).$$

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Satz 32.

Korollar 40. *Es sei $\mathcal{A}$ zulässig vom Typ $(\mu,\nu) > (1,0)$. Dann ist der zugehörige Operator stetig*

$$A : L^2_\alpha(D) \to L^2_\alpha(D).$$

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus dem letzten Korollar, denn der Typ von $\bar{\partial}r \wedge \mathcal{A}$ ist automatisch mindestens so groß wie der von $\mathcal{A}$.

In den bisherigen Ergebnissen tauchen als Kriterien stets echte Ungleichungen auf. In einigen Fällen ist auch für diese möglich, Aussagen für die Grenzfälle zu gewinnen. Die für uns wichtigste ist:

Satz 41. *Es sei $\alpha > 1$ und $\mathcal{A}$ ein zulässiger Kern, so daß*

$$\mathcal{A}(\zeta,z) \text{ vom Typ } (\mu,\nu) \text{ und}$$
$$\bar{\partial}r \wedge \mathcal{A}(\zeta,z) \text{ vom Typ } (\mu',\nu')$$

sind, und in lokaler Darstellung von $\mathcal{A}$ komme kein P*-Faktor im Nenner vor. Dann ist der zugehörige Operator $Af := (f,\overline{\mathcal{A}})_\alpha$ stetig*

$$A : L^2_\vartheta(D) \to L^2_\kappa(D)$$

für $1 \le \vartheta < 2\alpha - 1$, $\kappa > 1$ auch bei Gleichheit in den Typbedingungen von Satz 32, also falls

$$\vartheta - \kappa \le \mu + 1, \quad \vartheta - \kappa \le \nu, \quad \vartheta - \kappa \le \mu' - 1 \text{ und } \vartheta - \kappa \le \nu'.$$

Beweis. Wir gehen zum Beweis genauso vor wie im letzten Satz und müssen in den dortigen Bezeichnungen wiederum die gleichmäßige Integrierbarkeit der Kerne $\mathcal{K}'_1$ bis $\mathcal{K}'_4$ zeigen, was sich nur für den Fall, daß Gleichheit in der Typbedingung für μ, ν, μ' oder ν' vom letzten Satz unterscheidet. Die zusätzliche Voraussetzungen sichern uns jedoch, daß in den Kernen kein Faktor P aber echt positive Potenzen von $(-r)$ und $(-\rho)$ vorkommen, so daß wir in der Situation von Satz I 55 sind. Dieser sichert, daß die Integrale über $\mathcal{K}'_1$ bis $\mathcal{K}'_4$ gleichmäßig beschränkt bleiben, so daß wir wiederum aus Lemma 31 die Beschränktheit des Operator A folgern können.

In Analogie zu den Korollaren 39 und 40 erhalten wir als Spezialfälle von Satz 41

Korollar 42. *Es sei $\alpha > 1$ und $\mathcal{A}$ zulässig ohne* P*-Faktor in lokaler Darstellung. Es sei $\mathcal{A}$ vom Typ (μ,ν) mit $\mu \ge 0$ und $\nu \ge -1$ und $\bar{\partial}r \wedge \mathcal{A}$ vom Typ (μ',ν') mit $\mu' \ge 1$ und $\nu' \ge 0$. Dann ist der zugehörige Operator stetig*

$$A : L^2_\alpha(D) \to L^2_\alpha(D).$$

Korollar 43. *Es sei $\alpha > 1$ und $\mathcal{A}$ zulässig ohne* P*-Faktor in lokaler Darstellung und vom Typ (μ,ν) mit $\mu \ge 1$ und $\nu \ge 0$. Dann ist der zugehörige Operator stetig*

$$A : L^2_\alpha(D) \to L^2_\alpha(D).$$

2 Der Dimensionswechsel

2.1 Eigenschaften

In [ABO 98] und [Lam 00] wurde eine Methode entwickelt, Fragestellungen in streng pseudokonvexen Gebieten auf die Randwerte eines höherdimensionalen Gebiets zu übertragen und dort gewonnene Lösungen in Lösungen des Ursprungsproblems zurück zu übersetzen. Wir fassen die wichtigsten Punkte dieser Konstruktion noch einmal ohne Beweise zusammen. Falls nicht anders erwähnt, gelte stets $\alpha > 1$.

Definition 44. Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ streng pseudokonvex mit glatter Randfunktion r, wobei $dr \neq 0$ auf bD. Dann definieren wir

$$\tilde{D} := \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : z \in D \text{ und } r(z) + |w|^2 < 0\right\} \subset \mathbb{C}^{n+1}.$$

Lemma 45. *$\tilde{D}$ ist wiederum ein streng pseudokonvexes Gebiet mit glattem Rand. Als streng plurisubharmonische Randfunktion verwenden wir*

$$\tilde{r}(z,w) := r(z) + |w|^2.$$

Definition 46. Es sei f eine $(0,q)$-Form auf D, dann definieren wir eine $(0,q)$-Form $\tilde{f}$ auf $\tilde{D}$ durch die konstante Fortsetzung von f, d. h. durch

$$\tilde{f} = \tilde{f}(z,w) := f(z).$$

Lemma 47. *Für $f \in L^2_\alpha(D)$ gilt $\tilde{f} \in L^2_{\alpha-1}(\tilde{D})$ und*

$$||f||_\alpha = ||\tilde{f}||_{\alpha-1}.$$

Entsprechend der Definitionsgebiete der Formen ist dabei $||f||_\alpha$ in D und $||\tilde{f}||_{\alpha-1}$ in $\tilde{D}$ zu bilden.

Definition 48. Den Übergang aus Definition 46 betrachten wir als Operator $\tilde{}: f \mapsto \tilde{f}$. Dann ist $\tilde{}$ beschränkt (sogar isometrisch) von $L^2_\alpha(D)$ nach $L^2_{\alpha-1}(\tilde{D})$, besitzt also einen adjungierten Operator, den wir mit M_α bezeichnen. Für alle $f \in L^2_\alpha(D)$ und $g \in L^2_{\alpha-1}(\tilde{D})$ gilt

$$(f, M_\alpha g)_\alpha := (\tilde{f},\, g)_{\alpha-1}.$$

Wir werden M_α später zum Gewinn von Integralkernen benötigen. In Lemma 68 werden wir außerdem eine explizite Formel für die Berechnung von M_α angeben.

Lemma 49.

i) Es sei $f \in \operatorname{dom} \bar\partial \subset L^2_\alpha(D)$, dann gilt $\tilde{f} \in \operatorname{dom} \bar\partial \subset L^2_{\alpha-1}(\tilde{D})$ und

$$\widetilde{\bar\partial f} = \bar\partial \tilde{f}.$$

ii) Es sei $f \in \operatorname{dom} \bar\partial^*_\alpha \subset L^2_\alpha(D)$, dann gilt $\tilde f \in \operatorname{dom} \bar\partial^*_{\alpha-1} \subset L^2_{\alpha-1}(\tilde D)$ und

$$\widetilde{\bar\partial^*_\alpha f} = \bar\partial^*_{\alpha-1}\tilde f.$$

iii) Es sei $f \in \operatorname{dom} \Box_\alpha \subset L^2_\alpha(D)$, dann gilt $\tilde f \in \operatorname{dom} \Box_{\alpha-1} \subset L^2_{\alpha-1}(\tilde D)$ und

$$\widetilde{\Box_\alpha f} = \Box_{\alpha-1}\tilde f.$$

Lemma 50. *Zwischen M_α und $\bar\partial$ bzw. $\bar\partial^*$ besteht der Zusammenhang: Für $f \in \operatorname{dom} \bar\partial$ gilt*

$$M_\alpha \bar\partial f = \bar\partial M_{\alpha-1} f,$$

und für $g \in \operatorname{dom} \bar\partial^*_{\alpha-1}$ gilt

$$M_\alpha \bar\partial^*_{\alpha-1} g = \bar\partial^*_\alpha M_{\alpha-1} g.$$

2.2 Anwendungen

Aus Lemma 49 folgen einige Identitäten für die über die Metrik definierten Operatoren:

Korollar 51.

i) Es sei $\mathbf{K}_\alpha$ der kanonische Lösungsoperator der $\bar\partial$-Gleichung im Raum $L^2_\alpha(D)$ und $\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha-1}$ der kanonische Lösungsoperator der $\bar\partial$-Gleichung im Raum $L^2_{\alpha-1}(\tilde D)$. Dann gilt für alle $f \in L^2_\alpha$

$$\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f} = \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha-1}\tilde f.$$

ii) Es sei $\mathbf{N}_\alpha$ der Neumannoperator in $L^2_\alpha(D)$ und $\tilde{\mathbf{N}}_{\alpha-1}$ der Neumannoperator in $L^2_{\alpha-1}(\tilde D)$. Dann gilt für alle $f \in L^2_\alpha$

$$\widetilde{\mathbf{N}_\alpha f} = \tilde{\mathbf{N}}_{\alpha-1}\tilde f.$$

Beweis. Zum Beweis von i) zerlegen wir $L^2 = \ker\bar\partial \oplus (\ker\bar\partial)^\perp$ und prüfen die Identität auf beiden Summanden:

Es sei $f \in \ker\bar\partial \subset L^2_\alpha(D)$. Dann ist $\tilde f \in \ker\bar\partial \subset L^2_{\alpha-1}(\tilde D)$, also

$$\bar\partial\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f} = \widetilde{\bar\partial\mathbf{K}_\alpha f} = \tilde f = \bar\partial\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha-1}\tilde f.$$

Es sei andererseits $f \perp \ker\bar\partial \subset L^2_\alpha(D)$. Dann ist $\tilde f \perp \ker\bar\partial \subset L^2_{\alpha-1}(\tilde D)$ und somit

$$\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f} = 0 = \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha-1}\tilde f.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. Behauptung ii) können wir auf die gleiche Weise aus den Definitionen folgern, oder wir verwenden i) und die Formel $\mathbf{N}_\alpha = \mathbf{K}_\alpha\mathbf{K}^*_\alpha + \mathbf{K}^*_\alpha\mathbf{K}_\alpha$ aus Satz I 30, von dem wir später noch zeigen werden, daß die Voraussetzungen erfüllt sind.

2.3 Tangentialität und der Dimensionswechsel

Da $b\tilde{D}$ reell $(2n+1)$-dimensional ist, D aber reell $2n$-dimensional, können wir nicht erwarten, einen Eins-zu-eins-Zusammenhang zwischen $L^2(b\tilde{D})$ und $L^2_\alpha(D)$ zu finden. Wir betrachten daher einen Teilraum von Formen, die sich durch eine charakteristische Eigenschaft in der zusätzlichen Variable w auszeichnen:

Definition 52. Es sei φ eine $(0,q)$-Form auf $b\tilde{D}$ oder $\tilde{D}$. Dann nennen wir φ *invariant*, wenn für alle Rotationen $\tau_t(z,w) := (z, e^{it}w)$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $(z,w) \in b\tilde{D}$ bzw. $(z,w) \in \tilde{D}$ gilt, daß

$$\tau_t^* \varphi(z,w) = \varphi(z,w).$$

Den Raum aller invarianten tangentialen L^2-Formen auf $b\tilde{D}$ bezeichnen wir mit $L^2_{inv.}(b\tilde{D})$, den Teilraum der glatten Formen darin mit $\mathcal{E}^{inv.}(b\tilde{D})$. Analog bezeichnet $C^k_{inv.}(b\tilde{D})$ den Raum der k-mal stetig differenzierbaren invarianten tangentialen Formen auf $b\tilde{D}$.

Beispiel. Invariante Formen sind unter anderem

- alle Formen $f(z,w)$ auf $\tilde{D}$, die konstant in w sind, z. B. $\tilde{f}$ für $f \in L^2_\alpha(D)$,
- die Formen $wd\bar{w}$ und $\bar{\partial}\tilde{r}$,
- Tangential- und Normal-Anteil invarianter Formen,
- $\tilde{f}_t$ für jedes $f \in L^2_\alpha(D)$.

Nun erhalten wir den gewünschten Zusammenhang:

Satz 53. *Der Übergang $f \mapsto \tilde{f}_t$ ist bijektiv zwischen $C^\infty(\overline{D})$ und $\mathcal{E}^{inv.}(b\tilde{D})$.*

Beweis. Klar ist, daß für glattes f auch $\tilde{f}$ und damit $\tilde{f}_t$ wiederum glatt sind. Um die Injektivität zu zeigen, nehmen wir an, es sei $\tilde{f}_t = 0$. Dies bedeutet, daß $\bar{\partial}\tilde{\rho} \wedge \tilde{f} = 0$, also, wenn wir nach Differentialen sortieren, insbesondere $wd\bar{w} \wedge \tilde{f} = 0$ auf $b\tilde{D}$, denn $\tilde{f}$ ist von w und $d\bar{w}$ unabhängig. Es sei nun $z \in D$, dann gilt in den zugehörigen Punkten $(z,w) \in b\tilde{D}$, daß $w \neq 0$. Also muß dort $\tilde{f}(z,w) = 0$ sein und damit auch $f(z) = 0$. Aus Stetigkeitsgründen setzt sich dies auch in alle Punkte $z \in bD$ fort.

Für die Surjektivität müssen wir zeigen, daß wir aus jeder Form $\varphi \in \mathcal{E}^{inv.}(b\tilde{D})$ ein glattes $f \in C^\infty(\overline{D})$ zurückgewinnen können, welches $\tilde{f}_t = \varphi$ erfüllt. Dies folgt aus der folgenden Definition und dem anschließenden Satz.

Definition 54. Es sei $\varphi \in L^2_{inv.}(b\tilde{D})$ repräsentiert durch die Form $a(z,w) + b(z,w) \wedge wd\bar{w}$, wobei a and b kein $d\bar{w}$-Differential enthalten. Dann definieren wir einen Operator $\mathcal{R}$ durch

$$\mathcal{R}\varphi(z) := a(z, \sqrt{-r}) - b(z, \sqrt{-r}) \wedge \bar{\partial}r.$$

Theorem 55. *Der Operator $\mathcal{R}$ ist invers zum Übergang $f \mapsto \tilde{f}_t$. Er bildet $L^2_{inv.}(b\tilde{D})$ surjektiv nach $L^2_1(D)$ ab und erhält Glattheit, $\mathcal{R} : \mathcal{E}^{inv.}(b\tilde{D}) \to C^\infty(\overline{D})$.*

Beweis. Zunächst ist durch Definition 54 für jedes φ offensichtlich eine Form $\mathcal{R}\varphi$ auf D gegeben. In [Lam 00] wurde bewiesen, daß diese die gleiche Norm in $L^2_1(D)$ hat wie φ in $L^2_{inv.}(b\tilde{D})$.

Zum Beweis, daß für glattes φ auch f glatt ist, benötigen wir zwei Lemmata aus der Analysis einer Veränderlichen:

Lemma 56. *Es sei $f(x)$ eine gerade Funktion in $C^{2k}(\mathbb{R})$. Dann ist die Funktion*

$$F(x) := f(\sqrt{x})$$

C^k-glatt für $x \geq 0$ bis in den Ursprung.

Lemma 57. *Es sei $f(x)$ eine ungerade Funktion in $C^{k+1}(\mathbb{R})$. Dann ist die Funktion*

$$F(x) := \frac{f(x)}{x}$$

in $C^k(\mathbb{R})$ inklusive des Ursprungs, und F ist eine gerade Funktion.

Beweis (Fortsetzung Theorem 55)**.** Nun können wir den Beweis von Theorem 55 beenden. Falls $z \in D$, dann gilt $r \neq 0$ und $w \neq 0$ in einer Umgebung von z, also sind $\sqrt{-r}$ und $\frac{1}{w}$ dort glatte Funktionen und $f = \mathcal{R}\varphi$ also glatt nach der üblichen Kettenregel.

Es sei also $z_0 \in bD$. Wir wählen zunächst lokal geeignete Koordinaten $\Phi : (x, t) \mapsto z$, so daß $t = -\rho(z)$ gilt und eine Umgebung $U(z_0) \cap \overline{D}$ als Bild eines Produkts $V \times [0, \varepsilon)$ unter Φ dargestellt wird. Eine Umgebung $W \subset b\tilde{D}$ des Punktes $(z_0, 0)$ ist dann gegeben als

$$W = \left\{(\Phi(x,t), w) : x \in V,\ t \in [0, \varepsilon),\ |w|^2 = t\right\}.$$

Wir zeigen zuerst die Glattheit von $\mathcal{R}a$ in diesen Koordinaten. Zunächst ist $a(z, w)$ nun dargestellt als

$$a'(x, w) = a(\Phi(x, |w|^2), w),$$

und die Wirkung von $\mathcal{R}$ auf a ist

$$(\mathcal{R}a)(x, t) = a'(x, \sqrt{t}).$$

Nach Voraussetzung ist a' glatt in beiden Argumenten, insbesondere auch im Realteil von w, den wir mit y bezeichnen. Damit ist $\mathcal{R}a(x, y^2)$ glatt in x und y. Da a' aber eine gerade Funktion im zweiten Argument ist, ist es nach Lemma 56 auch glatt in dessen Quadrat, d. h. $\mathcal{R}a$ ist glatt in t bis zum Nullpunkt, der dem Punkt $z_0 \in bD$ entspricht.

Für $b \wedge wd\bar{w}$ verwenden wir zunächst die gleiche Konstruktion, allerdings wissen wir dabei nur, daß wb glatt ist, so daß wir zum Ergebnis kommen, daß $yb'(x, y^2)$ glatt in y ist. Nach Lemma 57 ist dann aber auch $b'(x, y^2)$ eine glatte Form und zudem gerade, so daß wir wiederum Lemma 56 anwenden können und das gewünschte Ergebnis auch für $\mathcal{R}b$ erhalten.

Indem wir genauer auf die Regularitätsklassen achten, können wir das Resultat noch etwas präzisieren:

Definition 58. Es sei $C^{k,l}$ der Raum der Formen $f(x, w)$ im oben eingeführten Definitionsgebiet, die insgesamt C^k-differenzierbar und in der Variablen $y := \operatorname{Re} w$ sogar C^l-differenzierbar sind.

Theorem 59. *Es sei $\varphi \in C^k(bD)$, und $a'(x, w)$ und $b'(x, w) \wedge w d\bar{w}$ seien wie im Beweis von Theorem 55 gebildet. Es gelte $a' \in C^{k,2k}$ und $b' \wedge w d\bar{w} \in C^{k,2k+1}$. Dann ist $\mathcal{R}\varphi \in C^k(\overline{D})$.*

Beweis. Der Beweis verläuft identisch zu dem Beweis von Theorem 55. Wir erhalten, daß $a(x, y^2) \in C^{k,2k}$. Daraus folgt, daß $a(x, y) \in C^{k,k}$ und damit $\mathcal{R}a \in C^k(\overline{D})$. Ebenso ergibt sich, daß $yb(x, y^2) \in C^{k,2k+1}$, also $b(x, y^2) \in C^{k,2k}$ und $b(x, y) \in C^{k,k}$. Auf diese Weise folgt $\mathcal{R}b \in C^k(\overline{D})$.

Beispiel. Der Verlust von Regularität im Anteil mit $w d\bar{w}$ läßt sich nicht vermeiden. Ein Gegenbeispiel zeigt, daß für Formen schon die Beziehung $C^0_{inv.}(bD) \to C^0(\overline{D})$ verletzt ist: Es sei

$$\varphi(z, w) := |w|^{-1+\varepsilon}(|w|^2 \bar{\partial}\rho - |\bar{\partial}\rho|^2 w d\bar{w}).$$

Diese Form ist tangential, invariant und stetig auf bD für $0 < \varepsilon < 1$, aber es ist

$$\mathcal{R}\rho = (-\rho)^{\frac{-1+\varepsilon}{2}} \bar{\partial}\rho,$$

und dies ist nicht stetig nach bD fortsetzbar.

Für Funktionen kann dies nicht passieren, sondern wir erhalten

Korollar 60. *Für Funktionen ist der Übergang $f \mapsto \tilde{f}_t$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ eine Bijektion zwischen $C^k(\overline{D})$ und $C^k(b\tilde{D})$.*

Beweis. Dies folgt aus dem vorherigen Satz, da Funktionen keine Differentiale enthalten und in der Zerlegung somit $b \equiv 0$ gilt.

3 Gewinn von Operatoren und Integralkernen

3.1 Transformiert zulässige Operatoren und Kerne

Mit Hilfe des Dimensionsübergang können wir einen Operator $\mathbf{T} : C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$, welcher Randwerte besitzt, in einen Operator $\hat{\mathbf{T}}^b : C(\overline{\tilde{D}}) \to C(b\tilde{D})$ überführen, indem wir für alle $f \in C(\overline{D})$ setzen: $\hat{\mathbf{T}}^b f := \widetilde{\mathbf{T}f}\big|_t$. Der Integralkern dieses Operators wäre eine Form über $D \times b\tilde{D}$, also die Randwerte einer Produktform in $D \times \tilde{D}$. Um auf bekannte Ergebnisse zurückgreifen zu können, ist es jedoch vorzuziehen, einen Integralkern in einem Produktgebiet mit gleichen Faktoren zu verwenden. Wir gehen daher von einem Kern auf $\tilde{D} \times \tilde{D}$ und Operator $\mathbf{T} : C(\overline{\tilde{D}}) \to C(\overline{\tilde{D}})$ aus, von dem wir dann jedoch zusätzlich die Invarianz der Randwerte im Bildraum fordern müssen:

Definition 61. Gegeben sei ein Operator

$$\mathbf{T} : C(\overline{\tilde{D}}) \to C(\overline{\tilde{D}})$$

mit Randwerten

$$\mathbf{T}^b : C(\overline{\tilde{D}}) \to C(b\tilde{D}).$$

Wenn für alle $f \in C(\overline{\tilde{D}})$ die tangentiale Form $\mathbf{T}^b \tilde{f}$ invariant auf $b\tilde{D}$ ist, dann induziert $\mathbf{T}^b$ einen Operator

$$\mathbf{T}' : C(\overline{D}) \to L^2_\alpha(D) \cap C(D) \qquad \text{für alle } \alpha > 0$$

durch

$$\widetilde{\mathbf{T}'f}\big|_t := \mathbf{T}^b \tilde{f} \qquad \text{d. h.} \qquad \mathbf{T}' f = \mathcal{R}\mathbf{T}^b \tilde{f}.$$

Bemerkung. Daß $\mathbf{T}'f \in L^2_\alpha(D) \cap C(D)$ ist, ergibt sich aus dem Beweis von Theorem 55, denn für stetiges $\mathbf{T}^b g$ ist $\sqrt{-r}\mathbf{T}'f \in C(\overline{D})$ und $\bar{\partial}r \wedge \mathbf{T}'f \in C(\overline{D})$. Falls $\mathbf{T}'f$ eine Funktion ist, gilt sogar $\mathbf{T}'f \in C(\overline{D})$.

Lemma 62. *Der Integralkern eines so gewonnenen Operators $\mathbf{T}'$ ist gegeben durch*

$$\mathcal{T}'(\zeta, z) = \mathcal{R}\bar{M}_\alpha \mathcal{T}^b(\zeta, \xi; z, w),$$

wobei $\bar{M}_\alpha$ gegeben ist durch $\bar{M}_\alpha f := \overline{M_\alpha \bar{f}}$ und bezüglich (ζ, ξ) wirkt; $\mathcal{R}$ und wirkt nur bezüglich (z, w). $\mathcal{T}^b$ ist der Kern des Operators $\mathbf{T}^b$, also eine Form auf $\tilde{D} \times b\tilde{D}$.

Beweis. Aus den Definitionen ergibt sich

$$(f, \overline{\mathcal{T}'})_\alpha = \mathbf{T}'f = \mathcal{R}\widetilde{\mathbf{T}'f}|_t = \mathcal{R}\mathbf{T}^b \tilde{f} = \mathcal{R}(\tilde{f}, \overline{\mathcal{T}^b})_{\alpha-1} = \mathcal{R}(f, M_\alpha \overline{\mathcal{T}^b})_\alpha = (f, \overline{\mathcal{R}\bar{M}_\alpha \mathcal{T}^b})_\alpha.$$

3.2 Anwendungen

Satz 63. *Es sei $\mathbf{K}_\alpha$ der kanonische Lösungsoperator der $\bar{\partial}$-Gleichung in $L^2_\alpha(D)$ und $\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha-1}$ der kanonischen Lösungsoperator in $L^2_{\alpha-1}(\tilde{D})$. Ebenso seien $\mathbf{N}_\alpha$ und $\tilde{\mathbf{N}}_{\alpha-1}$ die Neumann-operatoren in $L^2_\alpha(D)$ bzw. $L^2_{\alpha-1}(\tilde{D})$. Dann gilt – sofern die die linke Seite jeweils definiert ist –*

$$(\tilde{\mathbf{K}}^b_{\alpha-1})'f = \mathbf{K}_\alpha f, \qquad \textit{und} \qquad (\tilde{\mathbf{N}}^b_{\alpha-1})'f = \mathbf{N}_\alpha f,$$

wobei $\tilde{\mathbf{K}}^b_{\alpha-1}$ den Operator der Restriktionsrandwerte von $\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha-1}$ bezeichnet. Wir können also den kanonischen Lösungsoperator aus den Randwerten des Lösungsoperators der um 1 *erhöhten Dimension gewinnen.*

Beweis. Wir wissen bereits aus Korollar 51, daß $\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha-1}\tilde{f} = \widetilde{\mathbf{K}_\alpha f}$ für alle $f \in L^2_\alpha(D)$ und insbesondere invariant. Indem wir auf beiden Seiten die tangentialen Randwerte bilden und $\mathcal{R}$ anwenden, folgt die Behauptung. Auf die gleiche Weise zeigen wir die Aussage über $\mathbf{N}_\alpha$.

Satz 64. *Es sei $\mathcal{K}_\alpha$ der Integralkern von $\mathbf{K}_\alpha$ und $\tilde{\mathcal{K}}_{\alpha-1}$ der Integralkern von $\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha-1}$. Ebenso seien $\mathcal{N}_\alpha$ und $\tilde{\mathcal{N}}_{\alpha-1}$ die Integralkerne von $\mathbf{N}_\alpha$ bzw. $\tilde{\mathbf{N}}_{\alpha-1}$. Falls $\tilde{\mathcal{K}}$ und $\tilde{\mathcal{N}}$ Randwerte besitzen, gilt*

$$\mathcal{K}_\alpha(\zeta, z) = \mathcal{R}\bar{M}_\alpha \tilde{\mathcal{K}}^b_{\alpha-1}(\zeta, \xi; z, w)$$

und

$$\mathcal{N}_\alpha(\zeta, z) = \mathcal{R}\bar{M}_\alpha \tilde{\mathcal{N}}^b_{\alpha-1}(\zeta, \xi; z, w),$$

wobei $\tilde{\mathcal{K}}^b_{\alpha-1}$ und $\tilde{\mathcal{N}}^b_{\alpha-1}$ die Kerne der Randwerte von $\tilde{\mathcal{K}}_{\alpha-1}$ bzw. $\tilde{\mathcal{N}}_{\alpha-1}$ bezeichnen.

Beweis. Dies folgt aus Satz 63 durch den Übergang zu Integralkernen.

3.3 Verhalten zulässiger Kerne

Wir möchten nun die Methode des Dimensionsübergang für zulässige Kerne benutzen. Insbesondere möchten wir explizite Ausdrücke für diese zur Verfügung haben, um sie mit den abstrakten Aussagen der Theorie vergleichen zu können. Für eine Teilklasse von Kernen wird uns dies vollständig gelingen.

Definition 65. Es sei $\mathcal{A}(\zeta, z)$ ein zulässiger Kern auf $D \times D$, der uns in expliziter Form durch die übliche Darstellung wie durch Gleichung (41) in Abschnitt I gegeben ist. Aus dieser Darstellung bilden wir einen Kern $\tilde{\mathcal{A}}(\zeta, \xi, z, w)$, indem wir alle Vorkommen von ρ durch $\tilde{\rho}$, von v durch $\tilde{v}$ etc. ersetzen. Der Term E_m in $\mathcal{A}$ sei so beschaffen, daß diese kanonische Ersetzung auch für ihn möglich ist, das Ergebnis nennen wir $\tilde{E}_m$.

Wir gehen davon aus, daß $\tilde{\mathcal{A}}$ zumindest als Operator auf $\mathcal{E}$ Randwerte auf $b\tilde{D}$ besitzt, die wir mit $\tilde{\mathcal{A}}^b$ bezeichnen, und setzen voraus, daß der zugehörige Operator $\tilde{A}^b : \mathcal{E}(\tilde{D}) \to C^\infty(b\tilde{D})$ invariante Formen auf invariante Formen abbildet. Den Operator, den $\tilde{A}^b$ nach Definition 61 auf D induziert, nennen wir dann A', seinen Kern $\mathcal{A}'(\zeta, z)$.

Bemerkung. Da wir für die explizite Darstellung von $\tilde{\mathcal{A}}^b$ keinen Faktor $\tilde{r}$ benötigen und $\tilde{\mathrm{P}} \equiv \tilde{R}^2$ auf dem Rand, bleibt die Aufgabe, Kerne von der Struktur

$$\tilde{\mathcal{A}}^b = (-\tilde{\rho})^\delta \tilde{v}^{t_1} \tilde{\bar{v}}^{t_2} \tilde{v}^{*t_3} \tilde{\bar{v}}^{*t_4} \tilde{E}_m \tilde{R}^{-2t_0} \tag{66}$$

zu untersuchen. Differentiale tauchen dabei nur im $\tilde{E}_m$-Anteil auf. Es zeigt sich jedoch, daß ein allgemeiner Kern dieser Art noch zuviele „nicht-explizite“ Bestandteile enthält, um eine gute Beschreibung von $\mathcal{A}'$ zu gewinnen. Statt den allgemeinsten Fall zu behandeln, demonstrieren wir im folgenden die Methode anhand einer speziellen Teilklasse, die aber zumindest alle expliziten Kerne umfaßt, welche in dieser Arbeit auftreten:

Definition 67. Es sei $\mathcal{A}$ ein zulässiger Kern von geeigneter Form, so daß $\mathcal{A}'$ definiert ist, und in lokaler Darstellung sei

$$\mathcal{A}(\zeta, z) = \frac{(-\rho)^\delta E_m}{v^j \bar{v}^k},$$

also $t_0 = t_3 = t_4 = 0$ in Formel (66). Es gelte $j - \alpha - \delta - 2 \in \mathbb{N}$. Bei Bilden des isotrope Anteil $\tilde{E}_m(\zeta, \xi; z, w)$ sei dieser eine Summe von Termen von der Form

- $\mathcal{E}'_m(\zeta, z)$,
- $\partial\tilde{\rho} \wedge \mathcal{E}'_m(\zeta, z)$,
- $\bar{w} d\xi \wedge \mathcal{E}'_m(\zeta, z)$,
- $\xi d\bar{w} \wedge \mathcal{E}'_m(\zeta, z)$,
- $d\xi \wedge d\bar{w} \wedge \mathcal{E}'_m(\zeta, z)$,

wobei $\mathcal{E}'_j(\zeta, z)$ jeweils für einen isotropen Kern steht, der von ξ und w nicht abhängt.[10] Die Ordnung m der verschiedenen Summanden muß dabei nicht übereinstimmen. Dann nennen wir den aus $\tilde{\mathcal{A}}^b$ (und damit aus $\mathcal{A}$) entstehenden Kern $\mathcal{A}'$ *transformiert zulässig.*

Wenn der Kern $\mathcal{A}$ vom α-Typ (μ, ν) ist, nennen wir auch $\mathcal{A}'$ von diesem Typ.

Wir bestimmen nun den Kern $\mathcal{A}'$ durch Anwendung der Operator $\mathcal{R}$ und $\bar{M}_\alpha$ so weit wie möglich. Dazu benötigen wir zunächst eine Formel, wie der Operator $\bar{M}_\alpha$ auf $(q, 0)$-Formen wirkt.

Lemma 68. *Es sei $g \in L^{2,\alpha-1}_{(q,0)}(\tilde{D})$ zerlegt in $g(\zeta, \xi) = a + d\xi \wedge b$, wobei a und b kein $d\xi$-Differential enthalten. Dann gilt*

$$\bar{M}_\alpha g(\zeta) = \frac{\alpha - 1}{\pi} \int\limits_{|\tau|<1} (1 - |\tau|^2)^{\alpha-2} \left(a(\zeta, \tau\sqrt{-\rho}) - \frac{\tau}{\sqrt{-\rho}} \partial\rho \wedge b(\zeta, \tau\sqrt{-\rho}) \right) dl(\tau).$$

[10] Diese Formen von $\tilde{E}_m$-Termen sind in der Tat die für uns wichtigsten, insbesondere umfassen sie alle Terme, die durch die Operator ∂_ζ oder $\bar{\partial}_z$ aus den Kernbestandteilen $\tilde{\rho}$, $\tilde{v}$, $\tilde{\bar{v}}$ etc. entstehen. Auch typische Fehlerterme, wie sie etwa durch die Beziehung $\tilde{v}^* - \tilde{v} = \tilde{\mathcal{E}}_3$ entstehen, sind enthalten, denn $\tilde{v}^* - \tilde{v} = v^* - v$ und ist damit ein $\mathcal{E}_3$-Term ohne Abhängigkeit von ξ und w.

Beweis. Der Beweis ist eine einfache Umformung der Definitionen und findet sich z.B. in [Lam 00].

Definition 69. Wie man sieht, besteht die Wirkung des Operators $\bar{M}_\alpha$ aus einer Substitution

$$\xi \mapsto \tau\sqrt{-\rho}$$

und einer anschließenden Integration über τ. Wir benennen diese Stufen einzeln durch

$$\bar{M}^1 g\,(\zeta,\tau) := a(\zeta,\tau\sqrt{-\rho}) - \frac{\tau}{\sqrt{-\rho}}\partial\rho \wedge b(\zeta,\tau\sqrt{-\rho})$$

für ein $g = g(\zeta,\xi)$, das wie oben zerlegt sei, und

$$\bar{M}^2 h\,(\zeta) := \frac{\alpha-1}{\pi}\int\limits_{|\tau|<1}(1-|\tau|^2)^{\alpha-2}h(\zeta,\tau)dl(\tau)$$

für $h = h(\zeta,\tau)$.

Korollar 70. *Es gilt* $\bar{M}_\alpha = \bar{M}^2\bar{M}^1$, *und sowohl* $\bar{M}^1$ *als auch* $\bar{M}^2$ *kommutieren mit* $\mathcal{R}$.

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus der Definition der Operatoren. Da $\mathcal{R}$ nur eine Substitution in w ist, während $\bar{M}_\alpha$, $\bar{M}^1$ und $\bar{M}^2$ in ξ wirken, beeinflussen sich ihre Wirkungen gegenseitig nicht.

Wir untersuchen nun, wie $\mathcal{R}\bar{M}$ auf einen zulässigen Kern von obiger Gestalt wirkt. Dabei betrachten wir zunächst $\bar{M}^1$ und $\mathcal{R}$. Beide sind Substitutionen, d. h. wir können sie auf jeden Faktor einzeln anwenden:

Lemma 71. *Es sei* $a = a(\zeta, z)$ *definiert durch*

$$a := \frac{\sqrt{-\rho}\sqrt{-r}}{v}.$$

Dann gilt

- $\mathcal{R}\bar{M}^1\tilde{\rho} = \rho(1-|\tau|^2)$,
- $\mathcal{R}\bar{M}^1\tilde{v} = v(1-a\bar{\tau})$,
- $\mathcal{R}\bar{M}^1\tilde{\bar{v}} = \bar{v}(1-\bar{a}\tau)$.

Beweis. Wir setzen jeweils in die Definitionen ein. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\bar{M}^1\tilde{\rho} &= \mathcal{R}\bar{M}^1(\rho+|\xi|^2) = \rho+|\tau|^2(-\rho) = \rho(1-|\tau|^2),\\
\mathcal{R}\bar{M}^1\tilde{v} &= \mathcal{R}\bar{M}^1(v-\bar{\xi}w) = v-\bar{\tau}\sqrt{-r}\sqrt{-\rho} = v-\bar{\tau}av = v(1-\bar{\tau}a),\\
\mathcal{R}\bar{M}^1\tilde{\bar{v}} &= \mathcal{R}\bar{M}^1(\bar{v}-\xi\bar{w}) = \bar{v}-\tau\sqrt{-r}\sqrt{-\rho} = \bar{v}-\tau\bar{a}\bar{v} = \bar{v}(1-\tau\bar{a}).
\end{aligned}$$

Es bleibt noch, das Verhalten der isotropen Anteile unter $\mathcal{R}\bar{M}^1$ zu untersuchen.

Lemma 72. *Wir unterscheiden verschiedene Fälle für $\tilde{E}_m$, analog zu Satz 73. Es gilt dann*

- $\mathcal{R}\bar{M}^1 E'_m = E'_m$,
- $\mathcal{R}\bar{M}^1 \partial\tilde{\rho} \wedge E'_m(\zeta, z) = (1 - |\tau|^2)\partial\rho \wedge E'_m$,
- $\mathcal{R}\bar{M}^1 \bar{w} d\xi \wedge E'_m(\zeta, z) = \tau \dfrac{(-r)}{av} \partial\rho \wedge E'_m$,
- $\mathcal{R}\bar{M}^1 \xi d\bar{w} \wedge E'_m(\zeta, z) = \tau \dfrac{(-\rho)}{av} \bar{\partial} r \wedge E'_m$,
- $\mathcal{R}\bar{M}^1 d\xi \wedge d\bar{w} \wedge E'_m(\zeta, z) = \tau \dfrac{1}{av} \partial\rho \wedge \bar{\partial} r \wedge E'_m$.

Beweis. Der Beweis ist jeweils direktes Ausführen der Substitutionen $\bar{M}^1$ und $\mathcal{R}$.

Schließlich gelangen wir zum eigentlichen Ergebnis dieses Abschnitts:

Satz 73. *Es sei $\mathcal{A}$ zulässig und von einer Form, so daß $\mathcal{A}'$ definiert und transformiert zulässig ist. Der Term $\tilde{E}_m$ sei zerlegt in*

$$\tilde{E}_m = E^1 + \partial\tilde{\rho} \wedge E^2 + \bar{w} d\xi \wedge E^3 + \xi d\bar{w} \wedge E^4 + d\xi \wedge d\bar{w} \wedge E^5,$$

wobei E^1 bis E^5 jeweils isotrop sind, nicht von ξ oder w abhängen und auch nicht die Differentiale $d\xi$ oder $d\bar{w}$ enthalten. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathcal{A}' = \frac{(-\rho)^\delta}{v^{j+1}\bar{v}^k}(1 - |a|^2)^{\alpha+\delta-j-k}\Big(&vP_1 E^1 + vP_2 \partial\rho \wedge E^2 \\ &+ (-r)P_3 \partial\rho \wedge E^3 + (-\rho)P_4 \bar{\partial} r \wedge E^4 + P_5 \wedge \partial\rho \wedge \bar{\partial} r \wedge E^5\Big).\end{aligned}$$

Dabei sind P_1 bis P_5 Polynome in $(1-2|a|^2)$ vom Grad $j-\alpha-\delta$, normiert durch $P_j(1) = 1$.

Beweis. Indem wir die Substitutionen kombinieren, wissen wir bereits, wie $\mathcal{R}\bar{M}^1\tilde{\mathcal{A}}^b$ aussieht. Für den Beweis verbleibt also nur von die Integration $\bar{M}^2$ auszuführen. Die Rechnungen sind sehr ähnlich zu denen in [Lam 00], auf die wir bereits an anderer Stelle verwiesen haben. Zunächst faktorisieren wir alle Terme, bis nur noch Ausdrücke, die τ enthalten, unter dem Integralzeichen stehen. Exemplarisch führen wir dies für die Terme mit E^1_m und $\bar{w} d\xi \wedge E^3_{m'}$ durch, für welche wir erhalten:

$$\mathcal{R}\bar{M}\frac{(-\tilde{\rho})^\delta \tilde{E}^1_m}{\tilde{v}^j \bar{\tilde{v}}^k} = \frac{\alpha - 1}{\pi}\frac{(-\rho)^\delta E^1_m}{v^j \bar{v}^k}\int\limits_{|\tau|<1}\frac{(1 - |\tau|^2)^{\alpha+\delta-2}}{(1 - a\bar{\tau})^j(1 - \bar{a}\tau)^k} dl(\tau),$$

$$\mathcal{R}\bar{M}\frac{(-\tilde{\rho})^\delta \bar{w} d\xi \wedge E^3_{m'}}{\tilde{v}^j \bar{\tilde{v}}^k} = \frac{\alpha - 1}{\pi}\frac{(-\rho)^\delta \partial\rho \wedge E^3_{m'}}{v^j \bar{v}^k}\frac{(-r)}{av}\int\limits_{|\tau|<1}\frac{(1 - |\tau|^2)^{\alpha+\delta-2}\,\tau}{(1 - a\bar{\tau})^j(1 - \bar{a}\tau)^k} dl(\tau).$$

Die anderen Terme werden analog gebildet und wir erhalten

$$\mathcal{A}' = \frac{\alpha-1}{\alpha-\delta-1}\frac{(-\rho)^\delta}{v^j\bar{v}^k}\Big(I_{\alpha+\delta-2,j,k}E^1_m + I_{\alpha+\delta-2,j,k}\partial\rho\wedge E^2_{m'} \\ + I'_{\alpha+\delta-2,j,k}\frac{(-r)}{va}\partial\rho\wedge E^3_{m'} + I'_{\alpha+\delta-2,j,k}\frac{(-\rho)}{va}\bar{\partial}r\wedge E^4_{\bar{m}} + I'_{\alpha+\delta-2,j,k}\frac{1}{va}\partial\rho\wedge\bar{\partial}r\wedge E^5_{\bar{m}'}\Big),$$

wobei

$$I_{l,j,k} := \frac{l+1}{\pi}\int\limits_{|\tau|<1}\frac{(1-|\tau|^2)^l}{(1-a\bar{\tau})^j(1-\bar{a}\tau)^k}dl(\tau),$$

$$I'_{l,j,k} := \frac{l+1}{\pi}\int\limits_{|\tau|<1}\frac{(1-|\tau|^2)^l\tau}{(1-a\bar{\tau})^j(1-\bar{a}\tau)^k}dl(\tau).$$

Aus Satz II 48 im Fall des Einheitskreises für $n=1$ erkennen wir, daß sich die Ausdrücke $I_{l,j,k}$ und $I'_{l,j,k}$ wie maximal $(1-|a|^2)^{l+2-j-k}$ verhalten werden. In der Tat identifiziert eine ausführlichere Analyse in [Lam 00] die Integrale als hypergeometrische Funktionen: Es ist

$$I_{l,j,k} = F(j;k,l+2;|a|^2)$$

welche wir über bekannte Relationen über F umschreiben können zu

$$= (1-|a|^2)^{l+2-j-k}F(l+2-j,l+2-k,l+2,|a|^2)$$
$$= \frac{\Gamma(j-l-1)\Gamma(j)}{\Gamma(l+2)}(1-|a|^2)^{l+2-j-k}P^{l+1,l+2-j-k}_{j-l-2}(1-2|a|^2),$$

für $j-l-2\in\mathbb{N}$. $P^{a,b}_c$ steht dabei für die Jacobi-Polynome [Sze 75], die durch

$$P^{a,b}_c(x) := \frac{(-1)^c}{2^c c!}(1-x)^{-a}(1+x)^{-b}\frac{d^c}{dx^c}\left((1-x)^{c+a}(1+x)^{c+b}\right). \tag{74}$$

gegeben sind. Die genaue Form benötigen wir an dieser Stelle jedoch noch nicht.

Durch partielle Integration des Integralausdrucks erhalten wir weiterhin

$$I'_{l,j,k} = \frac{aj}{l+2}I_{l+1,j+1,k}$$
$$= \frac{\Gamma(j-l-1)\Gamma(j)}{\Gamma(l+2)}(1-|a|^2)^{l+2-j-k}P^{l+2,l+2-j-k}_{j-l-2}(1-2|a|^2)$$

so daß beide entstehenden Polynome den gleichen Vorfaktor haben und auch die auftretenden Nenner übereinstimmen.

Indem wir die sich ergebende Terme einsetzen, die Konstanten in die Polynome aufnehmen und $\frac{1}{v}$ ausklammern, folgt die behauptete Form des Kerns. Aus der Definition von $I_{l,j,k}$ oder der Formel für $P^{a,b}_c$ entnimmt man durch eine einfache Rechnung, daß für $z\in bD$ (also $a=0$) $I_{l,j,k}=1$ gilt. Bei Bilden der Randwerte verbleiben nur die Terme mit E^1 bzw. E^2 im Kern; diese entsprechen gerade dem Ausgangskern $\mathcal{A}^b$.

Ebenso sieht man, daß $P^{a,b}_c(x) = \frac{\Gamma(c+b+1)}{\Gamma(c+1)\Gamma(b+1)}$ für $x=-1$. Daraus ergibt sich der Wert für $|a|=1$, wo $I_{l,j,k}$ singulär wird.

Indem wir die Polynome nach ihren Potenzen zerlegen, können wir noch einen weiteren Eindruck gewinnen, wie die Singularität des Kerns A' tatsächlich aussieht:

Lemma 75. *Es sei*

$$\sigma^2 := |v|^2 - (-\rho)(-r),$$

dann ist für jedes Polynom $P_{j-\alpha}$ vom Grad $j-\alpha$:

$$(1-|a|^2)^{\alpha-j-k} P_{j-\alpha}(1-2|a|^2) = \frac{|v|^{2k}}{|\sigma|^{2k}} \sum_{s=0}^{j-\alpha} \sum_{s'=0}^{s} c_{s,s'} \frac{|v|^{2(j-\alpha)-2s}(-\rho)^{s-s'}(-r)^{s-s'}}{\sigma^{2(j-\alpha)-2s'}}$$

mit reellen Konstanten $c_{s,s'}$. Dabei sind insbesondere alle Exponenten auf der rechten Seite nichtnegativ.

Beweis. Da

$$1-|a|^2 = \frac{\sigma^2}{|v|^2}$$

und

$$1-2|a|^2 = \frac{\sigma^2}{|v|^2} - \frac{(-\rho)(-r)}{|v|^2}$$

ist, folgt die Gestalt des Kerns durch Einsetzen in die Polynome und Ausmultiplizieren.

Den Term σ^2 können wir dabei noch etwas genauer charakterisieren durch:

Lemma 76. *Auf $D \times D$ gilt*

$$\sigma^2 \lesssim R^2,$$

aber für jedes kompakte $K \subset D$ gibt es eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $(\zeta, z) \in D \times K$ oder $(\zeta, z) \in K \times D$ gilt

$$\sigma^2 \geq c\, R^2.$$

Beweis. Weil wir gegen R^2 abschätzen wollen, müssen wir nur in der Nähe der Diagonalen $\Delta = \{(\zeta, z) \in D \times D : \zeta = z\}$ arbeiten. Dort schreiben wir $v = v^* + \mathcal{E}_3 = -r + F^* + \mathcal{E}_3$ und $\bar{v} = -r + \bar{F}^* + \mathcal{E}_3$, wobei F das in Definition I 34 eingeführte Levipolynom bezeichnet, und erhalten so

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= |v|^2 - (-\rho)(-r) \\
&= (-r + F^* + \mathcal{E}_3)\left(-r + \bar{F}^* + \mathcal{E}_3\right) - (-\rho)(-r) \\
&= (-r)\left(-r + F^* + \bar{F}^*\right) - (-\rho)(-r) + |F^*|^2 + \mathcal{E}_3 \\
&= |F^*|^2 + (-r)R^2 + \mathcal{E}_3, \qquad (77)
\end{aligned}$$

denn mittels Taylor-Entwicklung folgt, daß $-r + F^* + \bar{F}^* = -\rho + R^2 + \mathcal{E}_3$. Der erste Term in Gleichung (77) ist positiv und verschwindet in den Tangentialrichtungen von vierter, sonst von zweiter Ordnung. Die Randfunktion $(-r)$ ist auf K gleichmäßig durch eine Konstante $c > 0$ nach unten beschränkt, also folgt die Behauptung für $(\zeta, z) \in D \times K$.

Der Fall von $(\zeta, z) \in K \times D$ folgt auf gleiche Weise aufgrund der Symmetrie von σ^2 in den Variablen ζ und z.

3.4 Integrierbarkeit transformiert zulässiger Kerne

Aus den vorherigen Betrachtungen wissen wir, daß ein transformiert zulässiger Kern, der in L^2_α gebildet wird, in lokaler Darstellung aus Summanden der Form

$$\mathcal{T}(\zeta,z) := \underbrace{\frac{(-\rho)^\delta(-r)^\gamma E_m}{v^j\bar{v}^k}}_{=:\mathcal{T}_1(\zeta,z)} \underbrace{\left(\frac{|v|^{2k}}{\sigma^{2k}}\right)\frac{|v|^{2s}(-\rho)^{s'}(-r)^{s'}}{\sigma^{2s+2s'}}}_{=:\mathcal{T}_2(\zeta,z)} \tag{78}$$

besteht, wobei $\gamma,\delta,j,k,m,s,s' \geq 0$ sind. Die Bezeichnungen der Parameter sind dabei analog zu den vorherigen Kapiteln gewählt sind, ihre Werte müssen aber nicht die gleichen wie die des Ursprungskerns $\mathcal{A}$ sein.

Wie man sieht, hat der $\mathcal{T}_1$-Anteil die Struktur eines zulässigen Kerns. Wir bezeichnen diesen Anteil im folgenden auch als *zulässigen Anteil* des tranformiert zulässigen Kerns.

Der Faktor $\mathcal{T}_2$ besitzt aufgrund des Ausdrucks σ^2 im Nenner eine Singularität auf der gesamten Diagonalen $\Delta = \{\zeta = z\}$, nicht nur wie zulässige Kerne auf der Randdiagonalen, und wir nennen $E_m\mathcal{T}_2$ auch den *singulären Anteil* von $\mathcal{T}$. Daß wir E_m dabei mir $\mathcal{T}_2$ zusammenfassen liegt daran, daß $\mathcal{T}_2$ in seinem Verhalten einem isotropen Operator ähnelt, und wir insbesondere die Stärke der Singularität durch Abschätzungen mit dem isotropen Anteil E_m reduzieren können.

Zunächst müssen jedoch untersuchen, unter welchen Bedingungen ein transformiert zulässiger Kern $\mathcal{T}(\zeta,z)$ überhaupt integrierbar ist, wobei unser späteres Ziel sein wird, aus transformiert zulässigen Kernen Operatoren in L^p- und L^2_α-Räumen zu gewinnen.

Satz 79. *Es sei $\mathcal{T}(\zeta,z)$ ein Integralkern von der Form* (78) *mit*

i) $2\hat{s} - m < 2n$, *wobei* $\hat{s} := s + s' + k$.

Der zulässige Anteil $\mathcal{T}_1(\zeta,z)$ habe den Typ λ mit

ii) $\lambda > 0$ *oder*

ii') $\lambda \geq 0$ *und* $\gamma > 0$, $\delta > 0$.

Dann ist $|\mathcal{T}(\zeta,z)|$ in beiden Variablen gleichmäßig integrierbar, d. h. es gibt eine Konstante M, so daß

$$\int_D |\mathcal{T}(\zeta,z)|\, dl(\zeta) < M \tag{$**_z$}$$

und

$$\int_D |\mathcal{T}(\zeta,z)|\, dl(z) < M. \tag{$**_\zeta$}$$

Beweis. Wir untersuchen zunächst unabhängig von den Voraussetzungen, wie der Kern $\mathcal{T}$ beschaffen sein muß, damit das Integral existiert und beschränkt ist. Von den so gewonnenen Kriterien zeigen wir dann, daß sie in unserer Situation tatsächlich erfüllt sind.

Für den ganzen Beweis fixieren wir eine genügend kleine Umgebung U von Δ in $D \times D$. Da $\mathcal{T}$ außerhalb von U stetig bis zum Rand und somit beschränkt ist, reicht es für den Nachweis von $(**_z)$ und $(**_\zeta)$, in U zu arbeiten. Für festes z bezeichnen wir mit U_z die Punkte ζ, so daß (z, ζ) in U liegt und analog definieren wir U_ζ bei festem ζ.

Entscheidend beim Beweis der Integrierbarkeit ist, daß wir U in zwei Teile zerlegen können, auf denen $\mathcal{T}$ sich unterschiedlich verhält. Es sei

$$\begin{aligned} D^1 &:= \{(\zeta, z) \in U : \sigma^2 \geq \frac{1}{2}|v|^2\}, \\ D^2 &:= U \setminus D^1. \end{aligned}$$

Wir verwenden die Schreibweisen D_z^1 und D_z^2 bei festem z, wenn wir die gleiche Zerlegung auf U_z anwenden, ebenso D_ζ^1 und D_ζ^2 bei festem ζ. Da σ^2 auf Δ verschwindet, aber v keine Nullstelle im Innern des Produktgebiets hat, ist klar, daß $\Delta \subset D^2$ liegen muß. Zur genaueren Charakterisierung dieser Teilmengen beweisen wir zunächst zwei nützliche Lemmata:

Lemma 80. *Wenn U klein genug gewählt ist, gilt*

$$|v| \geq \frac{1}{2}(-\rho), \qquad |v| \geq \frac{1}{2}(-r)$$

auf ganz U.

Beweis. Nach Definition von v ist in einer Umgebung von Δ

$$2|v| \geq v + \bar{v} = (-\rho) + (-\rho + F + \bar{F}) = (-\rho) + (-r) + R^2 + \mathcal{E}_3.$$

Wenn nun U klein genug gewählt wurde, dominiert der positive R^2-Term auf ganz U gegenüber $\mathcal{E}_3$ und die Behauptung ist gezeigt.

Lemma 81. *Es sei $(\zeta, z) \in U$. Dann ist jede der Bedingungen*

a) $(-r) \geq 8(-\rho)$ *oder*

b) $(-\rho) \geq 8(-r)$ *oder*

c) $|v| \geq 4(-\rho)$ *oder*

d) $|v| \geq 4(-r)$

hinreichend dafür, daß $(\zeta, z) \in D^1$ ist.

Beweis. Aus *a*) oder *c*) in Verbindung mit der ersten Ungleichung von Lemma 80 folgt, daß

$$\frac{1}{2}|v|^2 \geq (-\rho)(-r)$$

also $\sigma^2 - \frac{1}{2}|v|^2 \geq 0$ und somit $(\zeta, z) \in D^1$. Analog folgt aus der zweiten Ungleichung von Lemma 80 der Beweis im Fall von *b*) und *d*).

Wir beginnen nun den eigentlichen Beweis von Satz 79. Um zunächst $(**_z)$ zu beweisen, zerlegen wir das verbleibenden Integrationsgebiet $U_z = D_z^1 \cup D_z^2$:

$$\int\limits_{U_z} |\mathfrak{T}|\; dl(\zeta) = \underbrace{\int\limits_{D_z^1} |\mathfrak{T}|\; dl(\zeta)}_{=:I_1(z)} \;+\; \underbrace{\int\limits_{D_z^2} |\mathfrak{T}|\; dl(\zeta)}_{=:I_2(z)}$$

und zeigen die Beschränktkeit beider Integrale einzeln.

Im Gebiet D_z^1 gilt nach Definition $\sigma^2 \gtrsim |v|^2$, nach Lemma 80 also auch $\sigma^{2k} \gtrsim (-\rho)(-r)$, und somit gibt es eine Konstante C, so daß $|\mathfrak{T}_2(\zeta, z)| \le C$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \int\limits_{D_z^1} \frac{(-\rho)^\delta (-r)^\gamma |E_m|}{v^j \bar{v}^k} \left(\frac{|v|^{2k}}{\sigma^{2k}} \right) \frac{|v|^{2s} (-\rho)^{s'} (-r)^{s'}}{\sigma^{2s+2s'}} \\ &\lesssim \int\limits_{D_z^1} \frac{(-r)^\gamma (-\rho)^\delta |E_m|}{v^j \bar{v}^k}. \end{aligned}$$

Der verbleibende Integrand ist also ein zulässiger Kern, und die Beschränkheit des Integral folgt aus Satz I 50, falls er Typ > 0 hat, bzw. aus Satz I 55, falls er Typ ≥ 0 hat und echt positive Potenzen von $(-\rho)$ und $(-r)$ enthält. Die Voraussetzungen *ii)* bzw. *ii')* entsprechen gerade diesen Kriterien, also ist $I_1(z)$ gleichmäßig beschränkt durch eine Konstante M.

Es bleibt, die Beschränktheit des zweiten Integrals zu überprüfen: Da in D_z^2 aufgrund von Lemma 81 keine der dortigen Bedingungen *a)* bis *d)* erfüllt sein kann, erhalten wir in Kombination mit Lemma 80

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(-\rho) \le |v| \le 4(-\rho) \le 32(-r), \\ \frac{1}{2}(-r) \le |v| \le 4(-r) \le 32(-\rho), \end{aligned}$$

so daß $(-r) \sim |v| \sim (-\rho)$ gilt. Wir können daher alle derartigen Faktoren des Kerns $\mathfrak{T}_1(\zeta, z)$ und den Zähler von $\mathfrak{T}_2(\zeta, z)$ gegen Potenzen von $(-r)$ abschätzen und erhalten

$$\begin{aligned} I_2(z) &= \int\limits_{D_z^2} \frac{(-\rho)^\delta (-r)^\gamma |E_m|}{v^j \bar{v}^k} \left(\frac{|v|^{2k}}{\sigma^{2k}} \right) \frac{|v|^{2s} (-\rho)^{s'} (-r)^{s'}}{\sigma^{2s+2s'}} \\ &\lesssim (-r)^{\gamma+\delta-j-k+2\hat{s}} \int\limits_{D_z^2} \frac{|E_m|}{\sigma^{2\hat{s}}}, \end{aligned} \tag{82}$$

wobei wir $\hat{s} := s + s' + k$ gesetzt haben. Der Exponent von $(-r)$ kann dabei positiv oder negativ sein, doch alle bei der Abschätzung auftretenden Konstanten sind unabhängig von z. Für die Beschränktheit des Gesamtausdrucks ist es daher ausreichend, daß das Integral sich nach oben durch eine Potenz von $(-r)$ abschätzen läßt, deren Exponent mindestens $-(\gamma + \delta - j - k + 2\hat{s})$ ist.

Um dies zu beweisen, benötigen wir ein weiteres Lemma, das wir jetzt schon etwas allgemeiner formulieren, als für diesen Spezialfall nötig:

Lemma 83. *Es sei $P_d(z) := \{\zeta \in U_z : \sigma \leq d\}$ die σ-Kugel vom Radius d um z. Dann gilt für $d := c(-r)$ und c konstant, daß*

$$\int\limits_{P_d(z)} \frac{|E_m||F^*|^l}{\sigma^{2\hat{s}}} \lesssim (-r)^{n+1+l+\frac{m}{2}-2\hat{s}},$$

falls $2\hat{s} - l - m < 2n$, wobei $F^*(\zeta, z) = \overline{F(z,\zeta)}$ das Adjungierte zum Levipolynom ist.

Beweis. Für jede kompakte Teilmenge K von D und $z \in K$ ist $\sigma^2 \lesssim R^2$ nach Lemma 76. Da $(-r)$ in K nach oben und unten durch echt positive Konstanten beschränkt ist, müssen wir hier nur zeigen, daß das Integral überhaupt existiert. Dazu schätzen wir ab:

$$\int\limits_{P_d(z)} \frac{|E_m||F^*|^l}{\sigma^{2\hat{s}}} \lesssim \int\limits_{\{\zeta \in D : |\zeta - z|^2 \leq d^2\}} \frac{|E_{m+l}|}{R^{2\hat{s}}} \quad \lesssim \quad M,$$

denn der entstehende Kern ist isotrop und nach Voraussetzung ist seine Ordnung mindestens $-2\hat{s} + m + l > -2n$.

Außerhalb von K können wir voraussetzen, daß z nahe genug an bD liegt, so daß $\partial r \neq 0$ und $\bar{\partial} r \neq 0$ sind. Dann verschwindet

$$d_\zeta \mathrm{Re}\ F^* \wedge d_\zeta \mathrm{Im}\ F^* = \frac{1}{2i} \sum r_i d\zeta^i \wedge \sum r_{\bar{i}} d\bar{\zeta}^i + \mathcal{E}_1,$$

dort ebenfalls nicht, und wir können $x_1 = \mathrm{Re}\ F^*$ und $x_2 = \mathrm{Im}\ F^*$ bei festem z als Teil eines Koordinatensystems wählen. Dieses vervollständigen wir wie üblich durch $\tilde{x} = (x_3, \ldots, x_{2n})$, so daß z in den Nullpunkt übergeht.

Aus dem Beweis von Lemma 76 wissen wir, daß in der Nähe von Δ

$$\sigma^2 \gtrsim |F^*|^2 + (-r)R^2$$

gilt, und indem wir dies in neuen Koordinaten schreiben, erhalten wir

$$\int\limits_{P_d} \frac{|E_m||F^*|^l}{\sigma^{2\hat{s}}} dl(\zeta) \lesssim \int\limits_{P_d} \frac{R^m\,(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{l}{2}}}{(x_1^2 + x_2^2 + (-r)R^2)^{\hat{s}}} dl(x).$$

Wir betrachten zunächst den Fall, daß $2\hat{s} - l - m \geq 0$ gilt, dann können wir den Nenner auf die übliche Weise abschätzen:

$$(x_1^2 + x_2^2 + (-r)R^2)^{\hat{s}} \gtrsim (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{l}{2}} (x_1^2 + x_2^2 + (-r)R^2)^{\hat{s}-\frac{l}{2}-\frac{m}{2}} (-r)^{\frac{m}{2}} R^m$$

und $R^2 \gtrsim ||\tilde{x}||^2$, so daß wir erhalten

$$\lesssim (-r)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{P_d} \frac{dl(x)}{(x_1^2 + x_2^2 + (-r)\|\tilde{x}\|^2)^{\hat{s}-\frac{l}{2}-\frac{m}{2}}}.$$

Wir renormieren die Koordinaten, indem wir $y_1 = \frac{1}{d}x_1$ und $y_2 = \frac{1}{d}x_2$ setzen. Für $j = 3, \dots, 2n$ setzen wir $y_j = \frac{\sqrt{-r}}{d}x_j$. Das Definitionsgebiet P_d ist bezüglich der neuen Koordinaten dann einfach eine gewöhnliche Kugel vom Radius 1. Für die Volumenelemente gilt $dl(x) = d^{2n}(-r)^{-(n-1)}dl(y)$, also

$$\lesssim d^{2n}(-r)^{-(n-1)-\frac{m}{2}} \int\limits_{B_1(0)} \frac{dl(y)}{d^{2\hat{s}-l-m}(y_1^2 + y_2^2 + \|\tilde{y}\|^2)^{\hat{s}-\frac{l}{2}-\frac{m}{2}}},$$

und da wir $d \sim (-r)$ gewählt hatten, ist dies

$$\lesssim (-r)^{n+1+l+\frac{m}{2}-2\hat{s}} \int\limits_{B_1(0)} \frac{dl(y)}{||y||^{2\hat{s}-l-m}}.$$

Es war vorausgesetzt, daß $2\hat{s}-l-m < 2n$; der Exponent des Nenners ist also kleiner als die reelle Dimension der Kugel B_1. Damit ist das Integral durch eine Konstante beschränkt und der Beweis des Lemmas beendet.

Falls $2\hat{s} - l \leq m$ gilt, schätzen wir nur $(x_1^2 + x_2^2 + (-r)R^2)^{\hat{s}} \gtrsim (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{l}{2}}(-r)^{\hat{s}-\frac{l}{2}}R^{2\hat{s}-l}$ ab und erhalten

$$\int\limits_{P_d} \frac{R^m\,(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{l}{2}}}{(x_1^2 + x_2^2 + (-r)R^2)^{\hat{s}}} dl(x) \lesssim (-r)^{-\hat{s}+\frac{l}{2}} \int\limits_{P_d} R^{m+l-2\hat{s}} dl(x).$$

Wegen $\sigma \gtrsim (-r)R^2$ gilt in P_d sicherlich $R^{m+l-2\hat{s}} \lesssim d^{m+l-2\hat{s}}(-r)^{-\frac{m}{2}-\frac{l}{2}+\hat{s}}$, also

$$\lesssim d^{m+l-2\hat{s}}(-r)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{P_d} 1\ dl(x),$$

und da wir bereits wissen, daß das Volumen von P_d sich hier wie $d^{2n}(-r)^{-(n-1)}$ verhält und $d \sim (-r)$ gilt, verbleibt

$$\lesssim (-r)^{n+1+l+\frac{m}{2}-2\hat{s}},$$

wie zu zeigen war.

Beweis (Satz 79 – Fortsetzung)**.** Wegen Lemma 81 gilt in D_z^1, daß $\sigma^2 \leq 8(-r)^2$, also ist $D_z^1 \subset P_d(z)$ mit $d = \sqrt{8}(-r)$. Durch Voraussetzung *i)* ist sichergestellt, daß $2\hat{s} - m < 2n$ gilt, so daß wir Lemma 83 mit $l = 0$ anwenden können.

Nun folgt die Beschränktheit von $(**_z)$, wenn wir nachprüfen können, daß keine negative Potenz von $(-r)$ verbleibt, wenn wir das Integral abgeschätzt und das Ergebnis in Gleichung (82) eingesetzt haben. Dazu rechnen wir nach

$$\begin{aligned}(n + 1 - 2\hat{s} + \frac{m}{2})\ &+\ (\gamma + \delta - j - k + 2\hat{s}) \\ &= n + 1 + \gamma + \delta - j - k + \frac{m}{2}\end{aligned}$$

und, da aus der Typgleichung insbesondere $\lambda \geq 2n + 2 - 2(j + k - \delta - \gamma) + m$ folgt, also

$$\geq \frac{\lambda}{2} \geq 0.$$

Damit ist der Beweis von $(**_z)$ vollständig.

Der Beweis von $(**_\zeta)$ läßt sich analog zu diesen Rechnungen führen, denn es tauchen nur positive Potenzen der Randfunktion auf, so daß die Rollen von ζ und z in allen Betrachtungen und Abschätzungen vertauschbar sind. Auch das Analogon von Lemma 76 bei Integration bezüglich z gilt, da wir $|F^*(z,\zeta)| = |F(\zeta,z)|$ und $F(\zeta,z) = \mathcal{E}_2 - F^*(\zeta,z)$ einsetzen können.

Wir verwenden dieses Ergebnis zur Einteilung transformiert zulässiger Kerne in Integrierbarkeitsklassen:

Definition 84. Es sei $\mathcal{T}(\zeta,z)$ ein Integralkern in der Form vom (78). Dann setzen wir

$$\begin{aligned} \lambda &:= 2n + 2 - 2(j + k - \gamma - \delta) + m, \qquad \text{(also der Typ von } \mathcal{T}_1(\zeta,z)), \\ l &:= 2n - (2\hat{s} - m), \end{aligned}$$

und nennen $[\lambda, l]$ den *transformierten Typ* von $\mathcal{T}$.

Einen beliebigen Integralkern $\mathcal{A}'$ nennen wir *vom transformierten Typ* $[\lambda, l]$, wenn wir ihn in Summanden $\mathcal{A}'_i$ der Form (78) vom Typ $[\lambda_i, l_i]$ zerlegen können, so daß $\lambda := \min_i \lambda_i$ und $l = \min_i l_i$. Von den Summanden einer solchen Zerlegung sagen wir, daß sie den Typ *bezeugen*. Falls im Zähler eines solchen Summanden ein Faktor F oder F^* auftaucht, können wir ihn vor der Berechnung von λ als $F = v + \rho$ bzw. $F^* = v^* + r$ behandeln, so daß der entstehende Typ höher ist, als wenn wir wie zur Berechnungvon l mit $F = \mathcal{E}_1 = F^*$ abschätzten.

Als direkte Folgerung erhalten wir

Korollar 85. *Es sei ein Kern $\mathcal{A}'$ vom transformierten Typ $[\lambda, l] > [0,0]$. Dann ist $|\mathcal{A}'|$ in beiden Variablen gleichmäßig integrierbar. Die gleiche Aussage gilt noch, falls bei $l > 0$ nur $\lambda = 0$ gilt, aber alle Summanden, in die $\mathcal{A}'$ zerlegt wird, echt positive Potenzen von $(-r)$ und $(-\rho)$ enthalten.*

Beweis. Der Beweis besteht in der Anwendung von Satz 79 auf die Summanden, welchen den Typ von $\mathcal{A}'$ bezeugen. $l > 0$ entspricht der dortigen Voraussetzung i), $\lambda > 0$ bzw. $\lambda \geq 0$ mit zusätzlicher Voraussetzung an die Potenzen der Randfunktion entspricht Voraussetzung ii) bzw. ii').

Da wir später ausschließlich mit Integraloperatoren arbeiten, die mit Hilfe des L^2_α-Skalarprodukts entstehen, definieren wir abkürzend für diese:

Definition 86. Es sei $\mathcal{A}'$ ein transformiert zulässiger Kern, so daß der Kern $(-\rho)^\alpha \mathcal{A}'$ vom transformierten Typ $[\lambda, l]$ und der Kern $(-\rho)^{\alpha-1}\partial\rho \wedge \mathcal{A}'$ vom transformierten Typ $[\lambda', l']$ ist. Dann nennen wir $\mathcal{A}'$ vom *transformierten α-Typ* $[\lambda, l; \lambda', l']$. Wir vergleichen transformierte Typen und transformierte α-Typen wie üblich komponentenweise.

Es bleibt also noch die Aufgabe, zu klären, welchen transformierten α-Typ ein Kern hat, von dem wir wissen, aus welchem zulässigen Kern er entstanden ist. Dabei erhalten wir zunächst:

Theorem 87. *Es sei $\mathcal{A}'$ ein transformiert zulässiger Kern, der aus einen zulässigen Kern $\mathcal{A}$ vom α-Typ (μ, ν) enstanden ist. Dann ist $\mathcal{A}'$ mindestens vom transformierten α-Typ $[\mu-2, \mu-3; \nu-1, \nu-1]$.*

Beweis. Wir nehmen $\mathcal{A}$ in der Form

$$\mathcal{A} = \frac{(-\rho)^\delta E_{(m,\tilde{m})}}{v^j \bar{v}^k}$$

an und setzen $t' := j + k - \delta - \alpha$. Da wir generell $j - \delta - \alpha \geq 2$ voraussetzen, müssen wir nur den Fall $t' \geq 2$ betrachten.

Wir berechnen zunächst l: Aus Satz 73 haben wir eine Zerlegung von $\mathcal{A}'$ in Kerne der Form (78), und mit Hilfe von Lemma 75 können wir für alle Summanden von $(-\rho)^\alpha \mathcal{A}'$ und $(-\rho)^{\alpha-1} \partial\rho \wedge \mathcal{A}'$

$$\hat{s} \leq t'$$

identifizieren. Da dieser die stärkste Singularität besitzt, müssen wir nur den Anteil mit $\hat{s} = t'$ untersuchen. Bei der Analyse des isotropen Anteils stellen wir fest, daß durch die Zerlegung des $\tilde{E}_m$-Terms in Satz 73 ein eventueller $\mathcal{E}_1$-Term $\xi - w$ oder $\bar{\xi} - \bar{w}$ auf unterschiedliche E^j verteilt werden kann, so daß die verbleibenden Terme E^1 bis E^4-Terme unter Umständen nur von der Ordnung $m - 1$ sind. Im E^5-Anteil ist dies nicht möglich, da ξ und w dort nur in den Differentialen vorkommen.[11] Wir berechnen also

$$2n - (2t' - (m-1)) = 2n - (2n + 3 - \mu) = \mu - 3$$

wegen der Typgleichung $\mu = 2n + 2 - 2t' + m$. Der singuläre Anteil von $(-\rho)^{\alpha-1} \partial\rho \wedge \mathcal{A}'$ unterscheidet sich nur durch das zusätzliche $\partial\rho$-Differential von dem von $(-\rho)^\alpha \mathcal{A}'$. Wir erhalten also analog mittels der Typgleichung $\nu = 2n + 2 - 2(t' - 1) + \tilde{m}$

$$2n - (2t' - (\tilde{m} - 1)) = 2n - (2n + 1 - \nu) = \nu - 1.$$

Die Typen der zulässigen Anteile von $(-\rho)^\alpha \mathcal{A}'$ können wir ebenfalls direkt aus der Zerlegung und der Betrachtung zu E^1 bis E^5 als

$$\begin{aligned} \lambda_j &= 2n + 2 - 2t' + m - 1 &=& \ \mu - 1, \qquad \text{für } j = 1, \ldots, 4, \\ \lambda_5 &= 2n + 2 - 2(t' + 1) + m &=& \ \mu - 2, \end{aligned}$$

also ist für $(-\rho)^\alpha \mathcal{A}'$ nur $\lambda = \mu - 2$.

---

[11] Als Beispiel für dieses Verhalten betrachten wir den isotropen Kern $E_1 := (\bar{\zeta} - \bar{z}) \cdot d\zeta$ in der Einheitskugel des $\mathbb{C}^n$. Es ist $\tilde{E}_1 = (\bar{\tilde{\zeta}} - \bar{\tilde{z}}) \cdot d\tilde{\zeta} = (\bar{\zeta} - \bar{z}) \cdot d\zeta + (\bar{\xi} - \bar{w}) d\xi$, aber zerlegt wird er zu

$$\tilde{E}_1 = -\bar{z} \cdot d\zeta + \bar{\tilde{\zeta}} \cdot d\tilde{\zeta} - \bar{w} d\xi = \mathcal{E}'_0 + \mathcal{E}'_0 \, \partial\tilde{\rho} - \mathcal{E}'_0 \, \bar{w} d\xi,$$

so daß wir als isotropen Anteil jeweils nur $\mathcal{E}'_0$ verwenden können.

Im Kern $(-\rho)^{\alpha-1}\partial\rho \wedge \mathcal{A}'$ verbleiben nur die Anteile von E^1 und E^4, die übrigen werden durch das zusätzliche $\partial\rho$-Differential annulliert. Ihre Typen sind

$$\lambda_1 = \lambda_4 = 2n + 2 - 2(t' + 1) + \tilde{m} - 1 \;=\; \nu - 1,$$

denn auch in dieser Zerlegung kann ein Term, der sich wie $|\xi - w|$ verhält, auf E^1 und E^4 verteilt werden. Damit gilt $\lambda = \nu - 1$ für diesen Kern.

Bemerkung 88. Als zusätzliche Information entnehmen wir dem Beweis außerdem noch: Bei Betrachtung von $\bar{\partial}r \wedge \mathcal{A}'$ wird der E_5-Term annulliert, d. h. $(-\rho)^{\alpha}\bar{\partial}r \wedge \mathcal{A}'$ hat unter gleichen Voraussetzungen sogar transformierten Typ $[\mu - 1, \mu - 3]$. Im der Zerlegung des Kerns $\bar{\partial}r \wedge \partial\rho \wedge \mathcal{A}'$ werden sogar alle Anteil außer E^1 annulliert. Es kann daher nicht passieren, daß ein $\mathcal{E}_m$-Term zu mehreren $\mathcal{E}_{m-1}$ zerlegt wird, und damit ist der Kern $(-\rho)^{\alpha-1}\bar{\partial}r \wedge \partial\rho \wedge \mathcal{A}'$ stets mindestens vom transformierten Typ $[\nu, \nu]$.

Wegen der starken Verschlechterung im Typ ist Theorem 87 nur dazu geeignet, auftretende Fehlerterme von hohem Typ zu kontrollieren, nicht aber die expliziten Kerne selbst, von denen wir später zeigen werden, daß sie von zulässigen Operatoren des Typs $(2, 1)$ bzw. $(3, 1)$ induziert werden.

Um deren Integrierbarkeit zu klären, untersuchen wir zunächst diejenigen Terme etwas genauer, die den singulären Anteil bilden:

Lemma 89. *Für die im Kern $\mathcal{A}'$ auftretenden Jacobi-Polynome $P_c^{a,b}$ gilt*

$$\frac{P_c^{a,b}(1-2|a|^2)}{(1-|a|^2)^m} - \frac{P_c^{a+1,b}(1-2|a|^2)}{(1-|a|^2)^m} = \frac{\tilde{P}(1-2|a|^2)}{(1-|a|^2)^{m-1}}$$

wobei $\tilde{P}$ ein Polynom vom Grad $c - 1$ ist.

Beweis. Aus Formel (74) entnehmen wir, daß

$$P_c^{a,b}(-1) = \frac{\Gamma(c+b+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(c+1)} = P_c^{a+1,b}(-1),$$

also hat $P_c^{a,b}(x) - P_c^{a+1,b}(x)$ eine Nullstelle bei $x = -1$, die wir ausfaktorisieren können zu

$$P_c^{a,b}(x) - P_c^{a+1,b}(x) = (1 + x)P'(x)$$

für ein Polynom P' vom Grad $c-1$. Indem wir wieder $x = 1-2|a|^2$ setzen und aus dem entstehenden Faktor $(1-|a|^2)$ kürzen, folgt die Behauptung des Lemmas mit $\tilde{P} := 2P'$.

Theorem 90. *Es sei $\mathcal{T}'$ transformiert zulässig, gebildet in L^2_α aus den Randwerten eines zulässigen Kerns*

a) $\tilde{\mathcal{A}}^b(\zeta, \xi; z, w) = \dfrac{(-\rho)^{\delta} E'_m}{\tilde{v}^j \bar{\tilde{v}}^k}$, *bzw.*

b) $\tilde{\mathcal{B}}^b(\zeta,\xi;z,w) = \dfrac{(-\rho)^\delta \partial_\zeta \tilde{\tilde{v}} \wedge E'_m}{\tilde{v}^j \tilde{\tilde{v}}^k}$, *bzw.*

c) $\tilde{\mathcal{C}}^b(\zeta,\xi;z,w) = \dfrac{(-\rho)^\delta \bar{\partial}_z^b \tilde{\tilde{v}} \wedge E'_m}{\tilde{v}^j \tilde{\tilde{v}}^k}$, *bzw.*

d) $\tilde{\mathcal{D}}^b(\zeta,\xi;z,w) = \dfrac{(-\rho)^\delta (\partial_\zeta \bar{\partial}_z^b \tilde{\tilde{v}})^q \wedge E'_m}{\tilde{v}^j \tilde{\tilde{v}}^k}$,

wobei $E'_m = E'_m(\zeta,z)$*, also ohne* ζ *und* $\bar{w}$ *sowie deren Differentiale. Die Kerne seien jeweils vom* α*-Typ* (μ,ν)*. Dann hat* $\mathcal{T}'$ *die Form*

a) $\mathcal{A}'(\zeta,z) = \dfrac{(-\rho)^\delta \hat{E}'_m \; P_{j-\alpha-\delta}^{\alpha+\delta-1,\; l+\delta-j-k}}{v^j \bar{v}^k \quad (1-|a|^2)^{j+k-\alpha-\delta}}$,

bzw.

b) $\mathcal{B}'(\zeta,z) = \dfrac{(-\rho)^\delta \hat{E}'_m}{v^{j+1}\bar{v}^k} \wedge \left(\dfrac{v\,\partial_\zeta \bar{v} \; P_{j-\alpha-\delta}^{\alpha+\delta-1,\; l+\delta-j-k} \;+\; (-r)\,\partial_\zeta \rho \; P_{j-\alpha-\delta}^{\alpha+\delta,\; l+\delta-j-k}}{(1-|a|^2)^{j+k-\alpha-\delta}} \right)$,

bzw.

c) $\mathcal{C}'(\zeta,z) = \dfrac{(-\rho)^\delta \hat{E}'_m}{v^{j+1}\bar{v}^k} \wedge \left(\dfrac{v\,\bar{\partial}_z \bar{v} \; P_{j-\alpha-\delta}^{\alpha+\delta-1,\; l+\delta-j-k} \;+\; (-\rho)\,\bar{\partial}_z r \; P_{j-\alpha-\delta}^{\alpha+\delta,\; l+\delta-j-k}}{(1-|a|^2)^{j+k-\alpha-\delta}} \right)$,

bzw.

d) $\mathcal{D}'(\zeta,z) = \dfrac{(-\rho)^\delta \hat{E}'_m \wedge (\partial_\zeta \bar{\partial}_z \bar{v})^{q-1}}{v^{j+1}\bar{v}^k} \wedge \left(\dfrac{v\,\partial_\zeta \bar{\partial}_z \bar{v} \; P_{j-\alpha-\delta}^{\alpha+\delta-1,\; l+\delta-j-k} + q\partial\rho \wedge \bar{\partial} r \; P_{j-\alpha-\delta}^{\alpha+\delta,\; l+\delta-j-k}}{(1-|a|^2)^{j+k-\alpha-\delta}} \right)$,

wobei $\hat{E}'_m$ *sich nur um eine Konstante von* E'_m *unterscheidet. Die transformierten Typen der Kerne sind*

a) $[\mu,\mu-2;\nu,\nu]$ *für* $\mathcal{A}'$,

b) $[\mu,\mu-1;\nu,\nu]$ *für* $\mathcal{B}'$,

c) $[\mu-1,\mu-2;\nu-1,\nu]$ *für* $\mathcal{C}'$,

d) $[\mu-2,\mu-2;\nu,\nu]$ *für* $\mathcal{D}'$.

Falls $\partial\rho \wedge E'_m(\zeta,z)$ *von der höheren Ordnung* m' *ist, erhöhen sich die entsprechenden Anteile der transformierten Typs noch jeweils um* $m'-m$.

Beweis. Die Form der Kerne $\mathcal{T}'$ können wir wie zuvor mit Satz 73 gewinnen. Für *b)* bis *d)* müssen wir dazu $\partial_\zeta \tilde{\tilde{v}} = \partial_\zeta \bar{v} + \bar{w} d\xi$, bzw. $\bar{\partial}_z \tilde{\tilde{v}} = \bar{\partial}_z \bar{v} + \xi d\bar{w}$, bzw. $(\partial_\zeta \bar{\partial}_z^b \tilde{\tilde{v}})^q = (\partial_\zeta \bar{\partial}_z^b \bar{v})^q + q(\partial_\zeta \bar{\partial}_z^b \bar{v}) \wedge d\zeta \wedge d\bar{w}$ zerlegen und einsetzen. Wie wir gesehen haben, lassen sich die bei der partiellen Integration des Integral $I'_{l,j,k}$ entstehenden Konstanten gerade mit der Definition der Jacobipolynonme kombinieren, so daß $\hat{E}'_m = \frac{\Gamma(j-\delta-\alpha-1)\Gamma(\alpha+\delta)}{\Gamma(j)} E'_m$ als gemeinsamer Faktor entsteht und sich ausklammern läßt; weitere Besonderheiten treten nicht auf.

Es bleibt, die transformierten Typen zu berechnen:

a) $\mathcal{A}'$ ist bereits in der Form, daß wir wie in Theorem 87 vorgehen können, da

$$(-\rho)^\alpha \mathcal{A}' = \frac{(-\rho)^{\delta+\alpha} \mathcal{E}_m P^{\alpha+\delta-1,\ l+\delta-j-k}_{j-\alpha-\delta}}{v^j \bar{v}^k\ (1-|a|^2)^{t'}} \ \hat{=}\ \frac{(-\rho)^{\delta+\alpha} \mathcal{E}_m}{v^j \bar{v}^k\ \sigma^{2t'}}$$

mit $t' = j+k-\alpha-\delta$. Das Symbol $\hat{=}$ soll dabei heißen „hat den gleichen Typ wie“, denn wir hatten in Theorem 87 gesehen, daß der Typ des Gesamtkerns durch den des Anteils mit der höchstmöglichen Potenz von σ im Nenner beschränkt wird. Bezüglich der Zerlegung von Satz 73 haben wir also Kerne nur mit E^1-Anteil vorliegen, deren transformierten Typ wir als $[\mu, \mu-2]$ ablesen können. Entsprechend ist

$$(-\rho)^{\alpha-1} \partial\rho \wedge \mathcal{A}' \ \hat{=}\ \frac{(-\rho)^{\delta+\alpha-1} \partial\rho \wedge \mathcal{E}_m}{v^j \bar{v}^k \quad \sigma^{2t'}},$$

und damit vom transformierten Typ $[\nu, \nu]$.

b) Nach dem „naiven“ Ansatz zur Bestimmung des Typs würden wir wie in Theorem 87 eine Zerlegung des Kerns $\mathcal{B}'$ nach Satz 73 durchführen, wobei wir jedoch im isotropen Anteil eine Einheit verlieren und schließlich nur einen schlechteren Typ beweisen können als den behaupteten. Mit Hilfe von Lemma 89 können wir jedoch eine andere Zerlegung finden, die besser zur Abschätzung geeignet ist. Dazu schreiben wir den Zähler von $\mathcal{B}'$ als

$$v\, \partial_\varsigma \bar{v}\ P^1 - (-r)\, \partial\rho\ P^2 = (v+r)\, \partial_\varsigma \bar{v}\ P^1 + (-r)\, \partial_\varsigma \bar{v}(P^1+P^2) - (-r)\, \partial_\varsigma(\bar{v}+\rho) P^2,$$

wobei wir die beiden auftretenden Polynome als P^1 und P^2 abgekürzt haben. Aufgrund von Lemma 89 wissen wir, daß $P^1+P^2 = (1-|a|^2)\tilde{P}$, wobei $\tilde{P}$ von niedrigerem Grad ist, und wegen $v+r = F^*$ und $\partial_\varsigma(\bar{v}+\rho) = \partial_\varsigma F = \mathcal{E}_1$ können wir dies schreiben als

$$= F^* \mathcal{E}_{(0,1)} P^1 + (-r)\mathcal{E}_{(0,1)}(1-|a|^2)\tilde{P} + (-r)\mathcal{E}_{(1,1)} P^2.$$

Für $(-\rho)^\alpha \mathcal{B}'$ erhalten wir so eine Zerlegung in Summanden

$$\begin{aligned}(-\rho)^\alpha |\mathcal{B}'| &= \frac{(-\rho)^{\delta+\alpha} \mathcal{E}_m}{v^{j+1} \bar{v}^k} \left[\frac{F^* \mathcal{E}_0 P^1}{(1-|a|^2)^{t'}} + \frac{(-r)\mathcal{E}_0 \tilde{P}}{(1-|a|^2)^{t'-1}} + \frac{(-r)\mathcal{E}_1 P^2}{(1-|a|^2)^{t'}} \right] \\ &\hat{=}\ \frac{(-\rho)^{\delta+\alpha}}{v^{j+1} \bar{v}^k} \left[\frac{F^* \mathcal{E}_m}{\sigma^{2t'}} + \frac{(-r)\mathcal{E}_m}{\sigma^{2(t'-1)}} + \frac{(-r)\mathcal{E}_{m+1}}{\sigma^{2t'}} \right].\end{aligned}$$

Der Typgleichung entnehmen wir, daß $\mu = 2n+2-2t'+m$ ist, also haben die drei Summanden die zulässigen Typen

$$[\mu, \mu-1], \qquad [\mu, \mu] \qquad \text{und} \qquad [\mu+1, \mu-1],$$

und damit ergibt sich der transformierte Typ von $(-\rho)^\alpha \mathcal{B}'$ als $[\mu, \mu-1]$.

Für $(-\rho)^{\alpha-1}\partial\rho \wedge \mathcal{B}'$ verwenden wir die gleiche Zerlegung, wobei wir $\partial\rho \wedge \partial_\zeta \bar{v} = \mathcal{E}_1$ ausnutzen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}(-\rho)^{\alpha-1}|\partial\rho \wedge \mathcal{B}'| &= \frac{(-\rho)^{\delta+\alpha-1}\mathcal{E}_m}{v^{j+1}\bar{v}^k}\left[\frac{F^*\mathcal{E}_1 P^1}{(1-|a|^2)^{t'}} + \frac{\mathcal{E}_1 \tilde{P}}{(1-|a|^2)^{t'-1}} + \frac{\mathcal{E}_1 P^2}{(1-|a|^2)^{t'}}\right] \\ &\hat{=} \frac{(-\rho)^{\delta+\alpha-1}}{v^{j+1}\bar{v}^k}\left[\frac{F^*\mathcal{E}_{m+1}}{\sigma^{2t'}} + \frac{(-r)\mathcal{E}_{m+1}}{\sigma^{2(t'-1)}} + \frac{(-r)\mathcal{E}_{m+1}}{\sigma^{2t'}}\right],\end{aligned}$$

so daß sich mit Hilfe der Typvoraussetzung $\nu = 2n + 2 - 2(t'+1) + m + 1$ die transformierten Typen

$$[\nu, \nu+1], \qquad [\nu, \nu+2] \qquad \text{und} \qquad [\nu, \nu]$$

ergeben. Wie behauptet ist ihr Minimum $[\nu, \nu]$.

c) Die Methode für die dritte Kernart unterscheidet sich zunächst nur geringfügig von der zweiten. Die Zerlegung der Polynome ergibt hier

$$v\,\bar{\partial}_z\bar{v}\;P^1 - (-\rho)\,\bar{\partial}r\;P^2 = (v+\rho)\,\bar{\partial}_z\bar{v}\;P^1 + (-\rho)\,\bar{\partial}_z\bar{v}(P^1+P^2) - (-\rho)\,\bar{\partial}_z(\bar{v}+r)P^2,$$

was wir wegen $v+\rho = F$, $F + \bar{F}^* = \mathcal{E}_2$ und $\bar{\partial}_z(\bar{v}+\rho) = \mathcal{E}_1$ schreiben können als

$$= (\bar{F}^* + \mathcal{E}_2)P^1 + (-\rho)\mathcal{E}_0(1-|a|^2)\tilde{P} + (-r)\mathcal{E}_1 P^2.$$

Es folgt, daß

$$\begin{aligned}(-\rho)^\alpha|\mathcal{C}'| &= \frac{(-\rho)^{\delta+\alpha}\mathcal{E}_m}{v^{j+1}\bar{v}^k}\left[\frac{F^*\mathcal{E}_0 P^1}{(1-|a|^2)^{t'}} + \frac{\mathcal{E}_2 P^1}{(1-|a|^2)^{t'}} + \frac{(-r)\mathcal{E}_0\tilde{P}}{(1-|a|^2)^{t'-1}} + \frac{(-r)\mathcal{E}_1 P^2}{(1-|a|^2)^{t'}}\right] \\ &\hat{=} \frac{(-\rho)^{\delta+\alpha}}{v^{j+1}\bar{v}^k}\left[\frac{F^*\mathcal{E}_m}{\sigma^{2t'}} + \frac{\mathcal{E}_{m+2}}{\sigma^{2t'}} + \frac{(-r)\mathcal{E}_m}{\sigma^{2(t'-1)}} + \frac{(-r)\mathcal{E}_{m+1}}{\sigma^{2t'}}\right].\end{aligned}$$

Bis auf den zweiten Summanden hatten wir diese Ausdrücke schon für $(-\rho)^\alpha\mathcal{B}'$ behandelt, allerdings ist die Typgleichung wegen der anderen Form des Ausgangskerns in diesem Fall eine andere, nämlich $\mu = 2n + 2 - 2t' + m + 1$, so daß sich nun die transformierten Typen

$$[\mu-1, \mu-2], \qquad [\mu-1, \mu-1], \qquad [\mu-1, \mu-1] \qquad \text{und} \qquad [\mu, \mu-2]$$

ergeben. Damit hat $(-\rho)^\alpha\mathcal{C}'$ den transformierten Typ $[\mu-1, \mu-2]$.

Durch das zusätzliche $\partial\rho$-Differential verbessert sich die Ordnung des isotropen Anteils in $(-\rho)^{\alpha-1}\partial\rho \wedge \mathcal{C}'$ nicht, wir erhalten nur

$$\begin{aligned}&(-\rho)^{\alpha-1}|\partial\rho \wedge \mathcal{C}'| = \\ &\quad\frac{(-\rho)^{\delta+\alpha-1}\mathcal{E}_m}{v^{j+1}\bar{v}^k}\left[\frac{F^*\mathcal{E}_0 P^1}{(1-|a|^2)^{t'}} + \frac{\mathcal{E}_2 P^1}{(1-|a|^2)^{t'}} + \frac{(-r)\mathcal{E}_0\tilde{P}}{(1-|a|^2)^{t'-1}} + \frac{(-r)\mathcal{E}_1 P^2}{(1-|a|^2)^{t'}}\right] \\ &\hat{=} \frac{(-\rho)^{\delta+\alpha-1}}{v^{j+1}\bar{v}^k}\left[\frac{F^*\mathcal{E}_m}{\sigma^{2t'}} + \frac{\mathcal{E}_{m+2}}{\sigma^{2t'}} + \frac{(-r)\mathcal{E}_m}{\sigma^{2(t'-1)}} + \frac{(-r)\mathcal{E}_{m+1}}{\sigma^{2t'}}\right],\end{aligned}$$

so daß sich die singulären l-Anteile nicht verändert haben, jedoch in den zulässigen Anteilen eine Potenz weniger von $(-\rho)$ auftaucht. Die transformierten Typen der Summanden ergeben sich dann zu

$$[\nu-1,\nu], \qquad [\nu-1,\nu+1], \qquad [\nu-1,\nu+1] \qquad \text{und} \qquad [\nu,\nu],$$

und damit erhalten wir für $(-\rho)^{\alpha-1}\partial\rho \wedge \mathcal{C}'$ den transformierten Typ $[\nu-1,\nu]$.

d) Im letzten Fall ist es wegen der zu unterschiedlichen Differentiale nicht möglich, die Polynome so zu kombinieren, daß sich ein Faktor $(1-|a|^2)$ ausklammern läßt. Es gelingt uns daher nicht, besser abschätzen als

$$\begin{aligned}(-\rho)^\alpha|\mathcal{D}'| &= \frac{(-\rho)^{\delta+\alpha}}{v^{j+1}\bar{v}^k}\left[\frac{v\mathcal{E}_m P^1}{(1-|a|^2)^{t'}} + \frac{\mathcal{E}_m P^2}{(1-|a|^2)^{t'}}\right] \\ &\hat{=} \frac{(-\rho)^{\delta+\alpha}}{v^{j+1}\bar{v}^k}\left[\frac{v\mathcal{E}_m}{\sigma^{2t'}} + \frac{\mathcal{E}_m}{\sigma^{2t'}}\right].\end{aligned}$$

Die transformierten Typen sind $[\mu,\mu-2]$ und $[\mu-2,\mu-2]$, das Minimum also $[\mu-2,\mu-2]$.

Beim Bilden von $(-\rho)^{\alpha-1}\partial\rho\wedge\mathcal{D}'$ fällt der zweite Summand weg, da er bereits ein $\partial\rho$-Differential enthält. Es verbleibt als einziger Term

$$\begin{aligned}(-\rho)^{\alpha-1}|\partial\rho\wedge\mathcal{D}'| &= \frac{(-\rho)^{\delta+\alpha-1}}{v^{j+1}\bar{v}^k}\left[\frac{v\mathcal{E}_m P^1}{(1-|a|^2)^{t'}}\right] \\ &\hat{=} \frac{(-\rho)^{\delta+\alpha}}{v^{j}\bar{v}^k}\frac{\mathcal{E}_m}{\sigma^{2t'}},\end{aligned}$$

der vom tranformierten Typ $[\nu,\nu]$ ist, was also auch insgesamt der transformierte Typ von $(-\rho)^{\alpha-1}\partial\rho\wedge\mathcal{D}'$ ist.

Ebenso wie bei zulässigen Kernen ist die Singularität transformiert zulässiger Kerne so beschaffen, daß wir noch mehr als nur Integrierbarkeit zeigen zeigen können:

Satz 91. *Es sei $\mathcal{T}(\zeta,z)$ vom transformierten Typ $[\lambda,l] > [0,0]$. Dann ist für $1 \le s < \min(\frac{2n}{2n-l}, \frac{2n+2}{2n+2-\lambda})$ der Kern $|\mathcal{T}'(\zeta,z)|_\beta^s$ gleichmäßig regulär (im Sinne von Definition I 61).*

Beweis. Wir geben nur ein Skizze des Vorgehens, da der Beweis keine neuen Methoden enthält. Erstes Kriterium für gleichmäßige Regularität ist die gleichmäßige Integrierbarkeit des Kern in beiden Variablen. Bis auf die zusätzliche Potenz s ist der Beweis davon ein Kopie des Beweises von Satz 79. Die obere Grenze an s ist so gewählt wurde, daß sowohl die prüfenden Kriterien für den zulässigen Anteil als auch für den singulären Anteil noch erfüllt sind.

Das zweite zu prüfende Kriterium besteht darin, daß in keinem Punkt von D zuviel Masse des Kerns versammelt sein darf. Da diese Aussage rein lokal ist, können wir je nachdem, ob der betrachtete Punkt in D^1 oder in D^2 liegt, den Beweis von Satz I 62 für zulässige oder isotrope Kerne wiederholen.

3.5 Transformiert zulässige Operatoren in L^p und L^2_α

Wir haben die Klasse der transformiert zulässigen Kerne eingeführt bei der Untersuchung, wie die Integralkerne derjenigen Operatoren aussehen, die durch Definition 67 aus den Randwerten zulässiger Operatoren entstehen, wenn diese auf glatte Formen wirken. Auf glatte Formen haben wir uns dabei eingeschränken müssen, damit sichergestellt ist, daß die Formen im Bildraum Randwerte besitzen und für die Operatoren Distributions- und Restriktionsrandwerte übereinstimmen. Dies ist für die Konstruktion zwingend erforderlich.

Aus jedem transformiert zulässigen Kern $\mathcal{A}'$ selbst können wir jedoch durch die übliche Paarung

$$A'f := (f, \overline{\mathcal{A}'})_\alpha \approx \int_D (-\rho)^\alpha \langle f, \overline{\mathcal{A}'} \rangle_\beta + (-\rho)^{\alpha-1} \langle \partial\rho \wedge f, \overline{\partial\rho \wedge \mathcal{A}'} \rangle_\beta dl$$

einen Operator A' bilden, dessen Wirkung auf eine wesentlich größere Klasse von Formen erklärt ist, und den wir ebenfalls als *transformiert zulässig* bezeichnen wollen, da für glattes f beide Definitionen übereinstimmen. Mit Hilfe der Integrierbarkeitssätze des letzten Abschnittes können wir mögliche Definitionsgebiete und das Abbildungsverhalten dieser Operatoren studieren.

In Kapitel I haben wir gezeigt, daß zulässige Operatoren unter gewissen Voraussetzungen an ihren Typ auch für nicht glatte Formen Randwerte von beschränkter Rand-L^p-Norm besitzen. Der Grenzfall hierfür sind Formen in $L^2_1(D)$:

Satz 92. *Es sei $\alpha \geq 2$ und $\mathcal{A}'$ ein transformiert zulässiger Kern, der entstanden ist aus $\tilde{A}^b$, welches in $L^2_{\alpha-1}(\tilde{D})$ vom $(\alpha-1)$-Typ $(\mu, \nu) \geq (2,1)$ ist. Dann ist der zugehörige Operator A' stetig*

$$A' : L^2_1(D) \to L^2_1(D).$$

Beweis. Für jedes $f \in L^2_1(D)$ wissen wir, daß $\tilde{f} \in L^2(\tilde{D})$ und $(-\tilde{\rho})^{-\frac{1}{2}} \partial\tilde{\rho} \wedge \tilde{f} \in L^2(\tilde{D})$ sind. Es gilt nun $A'f = \mathcal{R}\tilde{A}^b\tilde{f}$, falls $\tilde{A}\tilde{f}$ Randwerte besitzt. Wir berechnen also zunächst

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^b \tilde{f} &= (\tilde{f}, \overline{\tilde{\mathcal{A}}^b})_{\alpha-1} \\
&\approx \int_{\tilde{D}} \langle f, \overline{(-\tilde{\rho})^{\alpha-1} \tilde{A}^b} \rangle_\beta dl + \int_{\tilde{D}} \langle (-\tilde{\rho})^{-\frac{1}{2}} \bar{\partial}\tilde{\rho} \wedge \tilde{f}, \overline{(-\rho)^{\alpha-2+\frac{1}{2}} \partial\tilde{\rho} \wedge \tilde{A}^b} \rangle_\beta dl \\
&= A^1 f + A^2 f.
\end{aligned}$$

wobei A^1 und A^2 zulässige Operatoren sind. Nach Voraussetzung ist A^1 mindestens vom Typ 2 und wegen $\alpha > 1$ kommt eine echt positive Potenz von $(-\tilde{\rho})$ im Kern vor. A^2 ist ein Kern vom Typ 1 mit zusätzlichem Faktor $(-\rho)^{\frac{1}{2}}$. Nach Satz I 114 besitzen dann A^1 und A^2 Randwerte als Operatoren auf $L^2(\tilde{D})$ und diese sind in $L^2(b\tilde{D})$, also gilt $\tilde{A}^b f \in L^2(b\tilde{D})$. Nach Theorem 55 erhalten wir, daß $\mathcal{R}\tilde{A}^b f \in L^2_1(D)$, also $A'f \in L^2_1(D)$. Da A^1, A^2 und $\mathcal{R}$ jeweils stetige Operatoren sind, gilt dies auch für A'.

Bemerkung 93. Um die Wirkung transformiert zulässiger Operatoren auf Formen aus $L^2_\alpha(D)$ mit $\alpha > 1$ zu untersuchen, können wir – außer in Ausnahmefällen – nicht mehr die Randwerteigenschaft ausnutzen, da wir keine Aussagen darüber besitzen, wann das Bild des $\mathcal{R}$-Operators in einem solchen $L^2_\alpha(D)$-Raum liegt.[12]

Wir müssen daher im folgenden mit den expliziten Ausdrücken der transformiert zulässigen Kerne arbeiten und werden aus dem tranformierten α-Typs gewisse Beschränktheitsaussagen gewinnen können.

Zunächst erhalten wir wie für zulässige und isotrope Kerne:

Theorem 94. *Es sei $\mathcal{A}'$ transformiert zulässig vom transformierten α-Typ $[\lambda_1, l_1; \lambda_2, l_2] > [0,0;0,0]$. Es sei $\lambda := \min(\lambda_1, \lambda_2)$ und $l := \min(l_1, l_2)$. Dann bildet der zugehörige Operator $A'f := (f, \overline{\mathcal{A}'})_\alpha$ ab:*

$$\begin{aligned} &A : L^p(D) \to L^r(D), \qquad &&\text{für } \frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \min\Big(\frac{\lambda}{2n+2}, \frac{l}{2n}\Big), \\ &A : L^\infty(D) \to C^0(\overline{D}), \end{aligned}$$

wobei $1 \le p, r, \le \infty$ ist, und $\frac{1}{0}$ als ∞ zu lesen ist.

Beweis. Der Beweis basiert auf Satz 91. Nach der dort gezeigten Aussage sind

$$\left|(-\rho)^\alpha \mathcal{A}'\right|_\beta \qquad \text{und} \qquad \left|(-\rho)^{\alpha-1} \partial\rho \wedge \mathcal{A}'\right|_\beta$$

noch in s-ter Potenz gleichmäßig integrierbar, wenn wir $s < \min(\frac{2n+2}{2n+2-\lambda}, \frac{2n}{2n-l})$ wählen. Die erste Behauptung folgt dann aus dem Youngschen Lemma I 45. Die zweite Aussage ergibt sich, da die gleichmäßige Regularität der beiden Kerne, nach Satz I 63 sicherstellt, daß ihre zugehörigen Operatoren jeweils den Raum L^∞ in $C^0(\overline{D})$ abbilden, also auch ihre Summe A'.

Die natürlichste Wahl eines Raumes, um die Wirkung transformiert zulässiger Operatoren zu studieren, ist L^2_α selbst, dessen Metrik ja in die Konstruktion des Operators eingeht. Unser Ergebnis ist dann, daß die betrachteten Operatoren regularisierend wirken in dem Sinne, daß wir im Bildraum nur ein schwächeres Gewicht benötigen als im Urbildraum:

Theorem 95. *Es sei $\mathcal{A}'$ ein transformiert zulässiger Kern vom transformierten α-Typ $[\lambda, l; \lambda', l'] > [0,0;0,0]$, so daß $\bar\partial r \wedge A'$ den transformierten α-Typ $[\bar\lambda, \bar l; \bar\lambda', \bar l'] > [1,0;0,0]$ hat. Dann ist der auf L^2_α induzierte Operator A' stetig*

$$A' : L^2_\vartheta \to L^2_\kappa$$

für alle $1 \le \vartheta \le 2\alpha - 1$ und $1 \le \kappa$ mit $\vartheta - \kappa < \min(\bar\lambda - 1, \lambda, \lambda')$.

---

[12] Offenbar können wir aus jedem Operator $T : L^2_1 \to L^2_1$ mit Kern $\mathfrak{T}$ einen Operator $\hat{T} : L^2_\alpha \to L^2_\alpha$ gewinnen, indem wir als Kern $\hat{\mathfrak{T}} = (-\rho)^\kappa (-r)^{-\kappa} \mathfrak{T}$ mit $\kappa = \frac{\alpha-1}{2}$ wählen. Der umgekehrte Weg, die Beschränktheit eines gegebenen Operators T in L^2_α-Norm auf dem Umweg über einen Operator $\hat{T}$ auf L^2_1 zu zeigen, scheitert jedoch im allgemeinen daran, daß wir in $\tilde{D}$ einen Kern mit Gewichtsfaktor $(-r)^\kappa (-\rho)^{-\kappa}$ abzuschätzen hätten, wobei $(-r)$ auf der dünnen Teilmenge $bD \subset b\tilde{D}$ verschwindet, während der Nenner des Kerns je nach Wert von (z, w) in jedem Punkt von $b\tilde{D}$ singulär werden kann. Es zeigt sich dann, daß die abzuschätzenden Integrale unter Umständen gar nicht existieren.

Beweis. Analog zum Fall zulässiger Operatoren (Satz 32), teilen wir den Operator A' in vier Operatoren auf, die in unterschiedlich gewichteten Räumen wirken. Wir müssen zeigen, daß

$$\mathcal{K}_1 := (-\rho)^\alpha \mathcal{A}', \qquad \mathcal{K}_2 := (-\rho)^{\alpha-1}\partial\rho \wedge \mathcal{A}',$$
$$\mathcal{K}_3 := (-\rho)^\alpha \bar{\partial} r \wedge \mathcal{A}', \qquad \mathcal{K}_4 := (-\rho)^{\alpha-1}\partial\rho \wedge \bar{\partial} r \wedge \mathcal{A}'.$$

beschränkt zwischen passenden isotrop gewichteten L^2-Räumen sind, nämlich

$$K_1 : L^2_{\beta;\vartheta}(D) \to L^2_{\beta;\kappa}(D), \qquad K_2 : L^2_{\beta;\vartheta-1}(D) \to L^2_{\beta;\kappa}(D),$$
$$K_3 : L^2_{\beta;\vartheta}(D) \to L^2_{\beta;\kappa-1}(D), \qquad K_4 : L^2_{\beta;\vartheta-1}(D) \to L^2_{\beta;\kappa-1}(D).$$

Ebenso wie in Satz 32 folgt die Stetigkeit der einzelnen Operatoren, und damit auch ihrer Summe, aus Lemma 31, wenn wir zeigen können, daß die entstehenden Kerne

$$\mathcal{K}'_1 := (-r)^{\frac{\kappa}{2}}(-\rho)^{\alpha-\frac{\vartheta}{2}}\mathcal{A}' \quad \text{und} \quad \mathcal{K}'_2 := (-r)^{\frac{\kappa}{2}}(-\rho)^{\alpha-1-\frac{\vartheta-1}{2}}\partial\rho \wedge \mathcal{A}',$$

$$\mathcal{K}'_3 := (-r)^{\frac{\kappa-1}{2}}(-\rho)^{\alpha-\frac{\vartheta}{2}}\bar{\partial} r \wedge \mathcal{A}' \quad \text{und} \quad \mathcal{K}'_4 := (-r)^{\frac{\kappa-1}{2}}(-\rho)^{\alpha-1-\frac{\vartheta-1}{2}}\bar{\partial} r \wedge \partial\rho \wedge \mathcal{A}'$$

gleichmäßig integrierbar sind.

Da mit einer Zerlegung von $\mathcal{A}'$ in Summanden auch eine Zerlegung der $\mathcal{K}'_i$ einhergeht, nehmen wir der Einfachheit halber an, daß $\mathcal{A}'$ bereits in der Form (78) gegeben ist. Die Voraussetzungen $\kappa \geq 1$ und $\vartheta \leq 2\alpha - 1$ stellen sicher, daß die $\mathcal{K}'_i$ keine negativen Potenzen der Randfunktion enthalten und damit ebenfalls von dieser Form sind. Nach Satz 91 ist der Beweis abgeschlossen, wenn wir zeigen können, daß die transformierten Typen von $\mathcal{K}'_1$ bis $\mathcal{K}'_4$, die wir als $[\lambda_1, l_1]$ bis $[\lambda_4, l_4]$ bezeichnen, jeweils echt positiv sind.

Zunächst stellen wir fest, daß der singuläre Anteil jeweils von den Vorfaktoren unbeeinflußt bleibt, also $l_1 = l$, $l_2 = l'$, $l_3 = \bar{l}$ und $l_4 = \bar{l}'$ ist. Damit gilt sicherlich $l_i > 0$ fur $i = 1, \ldots, 4$, und wir müssen nur noch die zulässigen Anteile untersuchen. Dabei können wir analog zu Lemma 35 vorgehen, in dem wir die Wirkung der gleichen Vorfaktoren auf zulässige Kerne bereits in untersucht hatten.

Da stets $t' \geq 2$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \lambda + \kappa - \vartheta \\
\lambda_2 &= \lambda' + \kappa - \vartheta + 1 \\
\lambda_3 &= \bar{\lambda} + \kappa - 1 - \vartheta \\
\lambda_4 &= \bar{\lambda}' + \kappa - \vartheta.
\end{aligned}$$

Die Voraussetzung an den transformierten α-Typ von $\mathcal{A}'$ von $\bar{\partial} r \wedge \mathcal{A}'$ sichert uns, daß $\lambda_i > 0$ für $i = 1, \ldots, 4$ gilt und damit die Stetigkeit von A' als Operator zwischen L^2_ϑ und L^2_κ.

Bemerkung 96. Auf analoge Weise kann man zeigen, daß für $\kappa > 1$ und $\vartheta < 2\alpha - 1$ auch $\vartheta - \kappa = \min(\bar{\lambda} - 1, \lambda, \lambda')$ gewählt werden kann. Außerdem ist in den Typen nur $l > 0$ und $l' > 0$ wirklich notwendig, während Operatoren mit $\bar{\lambda} = 1$ und $\lambda = 0$ zumindest noch $L^2_\vartheta \to L^2_\vartheta$ abbilden, sofern $1 < \vartheta < 2\alpha - 1$ gilt ($\vartheta = \alpha$ ist also insbesondere möglich). Die Beweise für diese Fälle lassen sich jeweils auf Korollar 85 zurückführen.

Die Anwendung transformiert zulässiger Operatoren von genügend hohem Typ verringert also den benötigten Gewichtsfaktor in den L^2_ϑ-Räumen. Es liegt daher die Frage nahe, ob wir durch Iteration transformiert zulässiger Operatoren, die Nötigkeit eines regularisierenden Gewichts ganz aufgeben können, ob also nach genügend Iterationen transformiert zulässiger Operatoren stets Formen in $L^2(D)$ entstehen. Dies ist in der Tat der Fall, und am einfachsten zu sehen, falls wir die letzte Schwelle von L^2_1 nach L^2 in einem Schritt überschreiten können:

Satz 97. *Es sei $\mathcal{A}'$ vom transformierten α-Typ $[\lambda, l; \lambda', l'] > [1, 0; 0, 0]$. Dann ist der zugehörige Operator stetig*

$$A' : L^2_\vartheta(D) \to L^2(D)$$

für alle $\vartheta \leq 1$. Für $\vartheta < 1$ haben auch Kerne mit mindestens Typ $\lambda = 1$ und $\lambda' = 0$ diese Eigenschaft.

Beweis. Da die Metrik im Bildraum isotrop ist, müssen wir den auftretenden Integralkern nur in zwei Bestandteile zerlegen, zum einen $(-\rho)^{\alpha-\frac{\vartheta}{2}}\mathcal{A}'$ und zum anderen $(-\rho)^{\alpha-1-\frac{\vartheta-1}{2}}\partial\rho\wedge\mathcal{A}'$. Ihre transformierten Typen sind mindestens $[\lambda-\vartheta, l]$ und $[\lambda'-\vartheta+1, l']$ und daher aufgrund der Voraussetzungen positiv.

Um die gewünschte Eigenschaft auch für Kerne von niedrigerem Typ zu erhalten, ohne daß negative Potenzen der Gewichtsfunktion auftreten, wie dies für L^2_ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ der Fall ist, gehen wir einen Umweg über die $L^2_{\beta;\kappa}$-Räume:

Satz 98. *Es sei $\mathcal{A}'$ vom transformiert α-Typ $[\lambda, l; \lambda', l'] > [0, 0; 0, 0]$, und $\bar{\partial}r \wedge A'$ vom transformierten α-Typ $[\bar{\lambda}, \bar{l}; \bar{\lambda}', \bar{l}'] > [1, 0; 0, 0]$. Dann gilt für alle $f \in L^2_{\beta;\vartheta}(D)$ mit $\partial\rho \wedge f \in L^2(D)$, daß*

$$A'f \in L^2_{\beta;\kappa}(D) \qquad \text{und} \qquad \bar{\partial}r \wedge A'f \in L^2(D)$$

für alle $\kappa \geq 0$ mit $0 \leq \vartheta - \kappa < \lambda$ und $\vartheta < \bar{\lambda}$.

Beweis. Aus $\mathcal{A}'$ bilden wir wiederum Kerne $\mathcal{K}_1$ bis $\mathcal{K}_4$. Da $L^2(D) = L^2_{\beta;0}(D)$ ist, reicht es zu zeigen, daß die Integralkerne

$$\mathcal{K}'_1 := (-r)^{\frac{\kappa}{2}}(-\rho)^{\alpha-\frac{\vartheta}{2}}\mathcal{A}', \qquad \mathcal{K}'_2 := (-r)^{\frac{\kappa}{2}}(-\rho)^{\alpha-1}\partial\rho \wedge \mathcal{A}',$$

$$\mathcal{K}'_3 := (-\rho)^{\alpha-\frac{\vartheta}{2}}\bar{\partial}r \wedge \mathcal{A}', \qquad \mathcal{K}'_4 := (-\rho)^{\alpha-1}\partial\rho \wedge \bar{\partial}r \wedge \mathcal{A}',$$

gleichmäßig integrierbar sind. Dies folgt aus ihrem positiven Typ analog zu den vorherigen Beweisen.

Indem man die bisher gewonnenen Aussagen iteriert, folgert man, daß bei genügend häufiger Iteration transformiert zulässiger Operatoren geeigneten Typs stets glättende Operatoren von L^2_α nach $C^0(\overline{D})$ entstehen, eine Eigenschaft, die wir schon von bei den aus zulässigen Kernen entstehenden Z-Operatoren aus Definition I 66 kennengelernt hatten. Um dies systematisch behandeln zu können, definieren wir erneut geeignete Operatorenklassen:

Definition 99. Es sei $\mathcal{Z}^T$ die kleinste Operatorenalgebra, so daß gilt:

- Falls A' vom transformierten α-Typ mindestens $[1, 1; 1, 1]$ ist und $\bar{\partial}r \wedge A'$ vom transformierten α-Typ mindestens $[2, 1; 1, 1]$ ist, dann ist $A' \in \mathcal{Z}^T$.
- Falls $A'_1 \in \mathcal{Z}^T$ und $A'_2 \in \mathcal{Z}^T$, dann ist auch $A'_1 \circ A'_2 \in \mathcal{Z}^T$.

Wir graduieren $\mathcal{Z}^T$ durch:

- Falls A' vom transformierten α-Typ $[\lambda, l, \lambda', l']$ und $\bar{\partial}r \wedge A'$ vom transformierten α-Typ $[\lambda, l, \lambda', l']$, dann ist $A' \in \mathcal{Z}^T_a$ mit $a := \min(\bar{\lambda} - 1, \lambda, \lambda', l)$.[13]
- Falls A'_1 in $\mathcal{Z}^T_a$ und A'_2 in $\mathcal{Z}^T_b$, dann ist $A'_1 \circ A'_2 \in \mathcal{Z}^T_{a+b}$.

Die Elemente in $\mathcal{Z}^T_a$ nennen wir *transformierte Z-Operatoren* oder *Z^T-Operatoren* der Ordnung a.

Die Resultate dieses Abschnitt stellen also sicher, daß transformierte Z-Operatoren in L^p und L^2_α-Räumen ebenso gute Eigenschaften haben wie gewöhnliche Z-Operatoren, insbesondere erreicht man durch iterierte Anwendung von Z^T-Operatoren immer beliebig hohe $L^p(D)$-Räume und schließlich den Raum $C^0(\overline{D})$.

Es stellt sich jedoch heraus, daß in manchen Situationen, transformierte Z-Operatoren als Fehlerterme nicht ausreichen. Wir definieren daher außerdem

Definition 100. Es sei T ein Operator, der als Komposition von transformiert zulässigen Operatoren mindestens von Typ $[1, 1; 0, 1]$ entsteht. Für ein $N \in \mathbb{N}$ besitze T eine Zerlegung

$$T = Z_{l_1} \circ Z_{l_2} \circ \cdots \circ Z_{l_N}$$

mit $l_j \in \mathbb{N}$ für $j = 1, \ldots, N$. Dabei sei Z_{l_j} für $l_j \geq 1$ jeweils ein transformierter Z-Operator der Ordnung l_j und $l_j = 0$ bedeute, daß der entsprechende Term nicht genügend hohen Typ hat, um ein transformierter Z-Operator zu sein. Dann nennen wir T einen *transformierten Z-Operator im erweiterten Sinn der Ordnung l*, wobei wir $l := \sum_{j=1}^{N} l_j$ setzen.

Bemerkung 101. Transformierte Z-Operatoren im erweiterten Sinn sind also im Grunde transformierte Z-Operatoren gleicher Ordnung, in die transformiert zulässige Operatoren von zu niedrigem Typ „eingeschoben“ sind. Deren Typ ist aber zumindest hoch genug für das Ergebnis:

Satz 102. *Es sei T ein transformierter Z-Operator im erweiterten Sinn der Ordnung $k \geq 0$. Dann ist T stetig:*

$$T : L^2_\vartheta(D) \to L^2_\kappa(D) \qquad \text{für } \kappa > 1,\ 1 < \vartheta < 2\alpha - 1 \text{ und } \vartheta - \kappa \leq k.$$

[13]Die übrigens Bestandteile der Typen sind aufgrund inhärenter Ungleichungen mindestens so groß wie a: Es gilt nämlich $\bar{l}' \geq l' \geq l$ und $\bar{l} \geq l$, sowie $\bar{\lambda}' \geq \lambda'$.

Beweis. T ist eine Komposition von transformierten Z-Operatoren und transformiert zulässigen Operatoren des Typs $[1,1;0,1]$. Die Anwendung der ersteren reduziert die Potenz des benötigten Gewichts nach Theorem 95 bzw. der anschließenden Bemerkung 96 jeweils um einen Wert, der ihrer Ordnung entspricht. Die Anwendung der letzteren erfordert es zumindest nicht, das Gewicht wieder zu erhöhen, was ebenfalls aus Bemerkung 96 folgt. Die Komposition bildet also zumindest L^2_ϑ nach L^2_κ ab, wobei sich $\vartheta - \kappa$ sich als Summe der Ordnungen der transformierten Z-Operatoren ergibt. Dieser Wert ist nach Definition gerade k.

Analog zu den asymptotischen Z-Operatoren definieren wir nun

Definition 103. Ein Operator $T : L^2_\alpha \to L^2_\alpha$ heißt *asymptotisch transformiert zulässig von der Ordnung* k, wenn es für jedes $m \in \mathbb{N}$ einen Z^T_k-Operator T^m_k gibt, so daß der Differenzterm

$$R^m := T - T^m_k$$

die Form

$$R^m = \sum_{i=1}^{N} R^{(i)}_m \circ L^{(i)}$$

für ein $N \in \mathbb{N}$ hat, wobei die $L^{(i)}$ beliebige stetige Operatoren $L^2_\alpha \to L^2_\alpha$ sind und die $R^{(i)}_m$ transformierte Z-Operatoren in $\mathcal{Z}^T_m$.

Falls wir T^m_k und die $R^{(i)}_m$ jeweils nur als transformierte Z-Operatoren im erweiteren Sinn wählen können, nennen wir T entsprechend *asymptotisch transformiert im erweiterten Sinn.*

Obwohl sie nicht selbst zulässig sind, können wir für Operatoren dieser Klasse ähnliche Abbildungseigenschaften beweisen:

Satz 104. *Es sei T ein asymptotisch transformiert zulässiger Operator auf L^2_α von der Ordnung k. Dann ist T stetig als Operator*

$$\begin{aligned} T &: L^2_\vartheta(D) \to L^2_\vartheta(D) \qquad \text{für } 1 \le \vartheta \le \alpha, \\ T &: L^p(D) \to L^p(D) \qquad \text{für } p \ge 2. \end{aligned}$$

Falls T nur im erweiterten Sinn asymptotisch transformiert ist, ist er zumindest noch stetig

$$T : L^2_\vartheta(D) \to L^2_\vartheta(D) \qquad \text{für } 1 < \vartheta \le \alpha.$$

Beweis. Wir betrachten T mit seiner Zerlegung

$$T = T_k + R_m \circ L,$$

wobei T_k^m und R_m transformierte Z-Operatoren der Ordnung k bzw. m sind, und $L : L^2_\alpha \to L^2_\alpha$ stetig. Der Ausdruck $R_m \circ L$ steht dabei verkürzt für eine Summe solcher Terme, welche in Definition 103 zugelassen ist. m sei in der Zerlegung „groß genug“ gewählt, wobei im Laufe des Beweises klar wird, was dies bedeutet.

Für $f \in L^2_\vartheta$ ist dann auch $T_k f \in L^2_\vartheta$, weil T_k als transformierter Z-Operatoren als Kompositionen transformiert zulässiger Operatoren in L^2_α entstehen und nach Theorem 95 jeder dieser Operatoren L^2_ϑ nach L^2_ϑ abbildet.

Weiterhin ist $L^2_\vartheta \subset L^2_\alpha$, also ist Lf definiert, und damit gilt zumindest $Lf \in L^2_\alpha$. Wir können jedoch m so groß wählen, daß R_m stark genug regularisierend wirkt, um stetig $R_m : L^2_\alpha \to L^2_\vartheta$ abzubilden. Dann gilt $R \circ Lf \in L^2_\vartheta$, also hat T die zu zeigende Eigenschaft.

Die gleiche Eigenschaft gilt für asymptotisch transformierte Operatoren im erweiterten Sinn, da nach Satz 102 auch transformierte Z-Operatoren im erweiterten Sinn für genügend hohe Ordnung das benötigte Gewicht weit genug reduzieren. Voraussetzung ist dafür, daß eine echte Potenz des Gewichts im Zielraums verbleibt, weshalb wir die Eigenschaft nur für $\vartheta > 1$ folgern können.

Der Beweis der Behauptung für L^p-Räume verläuft analog: Für $f \in L^p$ wissen wir nach Theorem 94, daß $T_k^m f \in L^p$, da es sich bei T_k um einen Z^T-Operator handelt. Wegen der Inklusion $L^p(D) \subset L^2(D) \subset L^2_1(D) \subset L^2_\alpha(D)$ können wir Lf bilden, und es gilt $Lf \in L^2_\alpha$. Die Kombination von Theorem 95, Satz 98 und wie zuvor Theorem 94 zeigt, daß der entstehende R_m-Term für hinreichend groß gewähltes m den Raum L^2_α nach L^p abbildet, so daß $R_m \circ Lf \in L^p$ gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen. Ein Analogon für asymptotisch transformierte Operatoren im erweiterten Sinn besteht hier nicht.

Bemerkung 105. Man entnimmt dem Beweis, daß es wiederum möglich ist, auch eine regularisierende Wirkung der Operatoren in Abhängigkeit von k zu zeigen. Wir gehen darauf an dieser Stelle jedoch nicht näher ein.

3.6 Regularität transformiert zulässiger Operatoren

Wenn wir transformiert zulässige Operatoren auf mindestens stetige Formen wirken lassen, können wir wieder die Eigenschaft verwenden, daß sie auf kontrollierte Weise aus Randwerten hervorgegangen sind. Es ist uns daher möglich, die Sätze über die tangentiale Regularität dieser Randwerte auf sie und die Z^T-Operatoren übertragen. Das Hauptergebnis ist:

Theorem 106. *Es sei A' ein transformiert zulässiger Operator vom Typ (λ) mit $\lambda > 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
&A' : C^\infty(\overline{D}) \to C^\infty(\overline{D}), \\
&A' : C^k_{0,q}(\overline{D}) \to C^{k-1}_{0,q'}(\overline{D}), \qquad \textit{für } q' \geq 1, \\
&A' : C^k_{0,q}(\overline{D}) \to C^k_{0,q'}(\overline{D}), \qquad \textit{falls } q' = 0 \textit{ oder } \lambda > 1,
\end{aligned}$$

Beweis. Der Operator A' sei entstanden aus den Randwerten des zulässigen Operators $\tilde{A}$ durch die Konstruktion aus Definition 61. Der Beweis besteht jeweils darin, zu zeigen, daß diese Randwerte von genügend hoher tangentialer Regularität sind, so daß nach dem Dimensionsübergang noch die geforderte Regularitätsklasse verbleibt.

Im Fall von $C^\infty(\overline{D})$-Regularität müssen wir dazu nur schon vorhandene Hilfsmittel kombinieren: Es sei $f \in C^\infty(\overline{D})$, dann ist $\tilde{f} \in C^\infty(\overline{\tilde{D}})$ und wissen wir nach Satz I 117, daß $\tilde{A}^b\tilde{f} \in C^\infty(b\tilde{D})$. Aus Theorem 55 folgt dann, daß $A'f \in C^\infty(\overline{D})$, denn nach Definition ist $A'f = \mathfrak{R}\tilde{A}^b\tilde{f}$, und $\mathfrak{R}$ erhält C^∞-Glattheit.

Falls f nur von endlicher Regularitätsstufe ist, zeigen wir zunächst:

Lemma 107. *Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $f \in C^k(\overline{D})$. Dann können wir $\tilde{A}^b f$ auf $b\tilde{D}$ zerlegen zu*

$$\tilde{A}^b\tilde{f} = a(z,w) + b(z,w) \wedge w d\bar{w}$$

wobei a und b kein $d\bar{w}$-Differential enthalten, so daß $a(x,y) \in C^{k,2k}$ und $b(x,y) \in C^{k,2k-1}$, in der Notation von Theorem 59.

Beweis. Im zulässigen Kern $\tilde{\mathcal{A}}$ des Operators $\tilde{A}$ kommen Differentiale nur im isotropen Anteil vor. Indem wir diesen in Anteile mit bzw. ohne $d\bar{w}$ zerlegen, erhalten wir wiederum isotrope Kerne von gleicher Ordnung, also erhalten wir auf einfache Weise eine Zerlegung von $\tilde{A}$ zu A_1 und $A_2 \wedge d\bar{w}$. Wir setzen $a(z,w) := A_1\tilde{f}$ und $wb(z,w) := A_2\tilde{f}$. Da A_1 und A_2 ebenso wie wie $\tilde{A}$ echt positiven Typ haben, sind $a(z,w)$ und $b(z,w) \wedge w d\bar{w}$ als Formen auf $b\tilde{D}$ nach Satz I 117 mindestens von gleicher Regularitätsstufe wie $\tilde{f}$, also in $C^k(b\tilde{D})$. In den tangentialen Koordinaten des Beweises von Theorem 55 heißt dies, daß $a(x,y)$ und $yb(x,y)$ sicherlich k-mal differenzierbar in x und y sind. Die Differenzierbarkeitsaussage des Lemmas bezüglich x ist damit gezeigt.

Es bleibt, die weitergehende Regularität in y zu zeigen: Wir untersuchen zunächst, wie sich $\frac{\partial}{\partial y}$ angewendet auf $a(x,y)$ in eine tangentiale Ableitung von $a(z,w)$ übersetzt. Wegen der

Transformation $(x,y) \mapsto (\Phi(x,|y|^2),y)$, wobei $\Phi(x,t) = (\varphi^1,\dots,\varphi^n)$ für festes t jeweils die Menge $\{z : r(z) = t\}$ parametrisiert, und $y = \operatorname{Re} w$ ist, gilt

$$\frac{\partial}{\partial y}a(x,w) = \underbrace{\Big(2\frac{\partial}{\partial w} + 2\frac{\partial}{\partial \bar w} + \sum_j w\frac{\partial \varphi^j}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_j \bar w\frac{\partial \bar\varphi^j}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \bar z_j}\Big)}_{=:T} a(z,w).$$

Wie man sieht, ist $\overline{T} = T$, also kann T keinen Anteil besitzen, der nur reell tangential wäre, sondern es gilt $T = W + \overline{W}$ mit holomorph tangentialem W und antiholomorph tangentialem $\overline{W}$.

Wir wenden die Kommutatorrelation aus Satz I 117 an, und erhalten zunächst für die Wirkung von W auf a, wobei wir im Index der zulässigen Kern vermerken, von welchem Typ der Kern ist:

$$\begin{aligned} Wa(z,w) &= WA^b_\lambda \tilde f \\ &= A^b_\lambda \tilde W \tilde f + A^b_\lambda \tilde f + A^b_{\lambda+1} d\tilde f \\ &= A^b_\lambda \tilde f + A^b_{\lambda+1} d\tilde f, \end{aligned}$$

denn $\tilde f(z,w)$ ist unabhängig von w, also $\tilde W \tilde f = \sum_j w\frac{\partial \varphi^j}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z_j}\tilde f = \mathcal{E}_1 \sum_j \frac{\partial}{\partial z_j}\tilde f$. Das gleiche können wir für $\overline{W}$ durchführen und erhalten als Summe von beiden:

$$\frac{\partial}{\partial y}a(x,y) = A^b_\lambda \tilde f + A^b_{\lambda+1} d\tilde f.$$

Eine weitere Ableitung $\frac{\partial}{\partial y}$ entspricht nun einer weiteren Anwendung von $W + \overline{W}$ auf die rechte Seite. Diesmal verwenden wir die Kommutatorrelation nur für den ersten Term, wohingegen wir im zweiten Term den Kern selbst differenzieren. Sowohl W als auch $\overline{W}$ erniedrigen den Typ dabei nur um 1. Wenn wir dies zusammenfassen, verbleibt

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}a(x,y) = A^b_\lambda \tilde f + A^b_\lambda d\tilde f, \tag{108}$$

und da $\lambda > 0$ gilt, existiert die rechte Seite und ist stetig für $f \in C^1(\overline{D})$. Durch Iteration ergibt sich das Ergebnis für höhere Ableitungen, und wir erhalten $a \in C^{k,2k}$. Da wir keine besonderen Eigenschaften von a benutzt haben, überträgt sich der Beweis ebenso auf $yb(x,y)$. Wie im Beweis von Theorem 59 folgt dann aus $yb \in C^{k,2k}$ nach Lemma 57, daß zumindest $b \in C^{k,2k-1}$.

Beweis (Theorem 106 – Fortsetzung)**.** Wir setzen den Beweis von Theorem 106 fort: Im Allgemeinfall wenden wir Lemma 107 auf $f \in C^k(\overline{D})$ an und wissen somit, daß $a \in C^{k,2k}$, aber nur $b \in C^{k,2k-1}$. Auf die Summe der Terme können wir also Theorem 59 nur für $k-1$ anwenden, und damit gilt

$$A'f : C^k_{0,q}(\overline{D}) \to C^{k-1}_{0,q'}(\overline{D}) \qquad \text{für } k \geq 1.$$

Falls jedoch $q' = 0$, d.h. $A'f$ eine Funktion ist, enthält $\tilde{A}^b\tilde{f}$ sicherlich kein $d\bar{w}$-Differential, also ist $b \equiv 0$. Wegen $a \in C^{k,2k}$ folgt dann aus Theorem 59 sogar

$$A'f : C^k(\overline{D})_{0,q} \to C^k_{0,0}(\overline{D}).$$

Ähnlich ist der Fall für $\lambda > 1$: Dann können wir in Gleichung (108) (bzw. dem Analogon nach $2k$-facher Differentiation) noch einmal nach y ableiten, wobei wir die Differentiation auf der rechten Seite auf die Kerne anwenden. Die entstehenden Operatoren sind vom Typ $\lambda - 1 > 0$, die rechte Seite ist also noch stetig, so daß wir gezeigt haben, daß $a(x,y) \in C^{k,2k+1}$ und $yb \in C^{k,2k+1}$ gilt. Damit ist insbesondere $b \in C^{k,2k}$, und es folgt wiederum nach Theorem 59

$$A'f : C^k_{0,q}(\overline{D}) \to C^k_{0,q'}(\overline{D}).$$

Weiterhin erhalten wir als zusätzliche Aussage:

Satz 109. *Es sei A' ein transformierter zulässiger Operator vom Typ (λ) mit $\lambda > 0$, dann gilt*

$$\bar{\partial}r \wedge A' : C^k_{0,q}(\overline{D}) \to C^k_{0,q'}(\overline{D})$$

für $q' = 0, \ldots, n$.

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus dem Beweis des vorherigen Theorems: Dort haben wir $\tilde{A}f = a(z,w) + b(z,w) \wedge w d\bar{w}$ zerlegt, wobei von a die $C^k(\overline{D})$-Regularität leicht zu zeigen ist und nur der Anteil b eine zusätzliche Betrachtung benötigt. Lemma 72 zeigt aber, daß durch die anschließende Substitution $\mathcal{R}$ alle Anteile mit $d\bar{w}$-Differential auf Terme mit $\bar{\partial}r$-Anteil abgebildet werden, die beim Bilden von $\bar{\partial}r \wedge A'$ annulliert werden. In $\bar{\partial}r \wedge A'$ verbleiben also nur Anteile, die aus $a(z,w)$ entstammen und somit $C^k(\overline{D})$-glatt sind.

Satz 110. *Es sei A' ein transformierter Z-Operator. Dann gilt für alle $q = 0, \ldots, n$*

$$A' : C^\infty_{0,q}(\overline{D}) \to C^\infty_{0,q'}(\overline{D}),$$

und falls $q' = 0$ ist oder alle transformiert zulässigen Operatoren, aus denen A' besteht, aus zulässigen Operatoren vom Typ größer als (1) entstanden sind, gilt auch für alle $k \in \mathbb{N}$

$$A' : C^k_{0,q}(\overline{D}) \to C^k_{0,q'}(\overline{D}).$$

Beweis. A' ist als Z^T-Operator eine Komposition $A'_1 \circ \cdots \circ A'_N$ von transformiert zulässigen Operatoren von genügend hohem Typ. Die einzelnen A'_j besitzen nach dem vorherigen Satz die gewünschte Eigenschaft, und da diese keinen Verlust an Regularität beinhaltet, bleibt sie unter Komposition erhalten.

Teil III

Ein expliziter Integralkern für den Neumannoperator

1 Die Verwendung des Dimensionsübergang zur Bestimmung von $\mathbf{N}_\alpha$

1.1 Reduktion auf ein Randproblem

Als Anwendung der in den letzten Kapiteln gewonnenen Methode des Dimensionsübergangs berechnen wir nun die Hauptteile des Neumannoperators $\mathbf{N}_\alpha$ und des kanonischen Lösungsoperators $\mathbf{K}_\alpha$ für $\bar\partial$ in den Räumen $L^2_\alpha(D)$. Wir erinnern dabei zunächst an Theorem I 90 von [LiM 02]:

Theorem. Es seien $\tilde{\mathcal{K}}(\zeta, z)$ und $\tilde{\mathcal{N}}(\zeta, z)$ die Kerne zulässiger Operatoren $\tilde K$ vom Typ 1 bzw. $\tilde N$ vom Typ 2, und es gelte für alle $f \in \operatorname{dom}\bar\partial \cap \operatorname{dom}\bar\partial^*_\alpha$, daß

$$\begin{aligned} f &= (\bar\partial f, \overline{\tilde{\mathcal{K}}}) + (\bar\partial f, \overline{\mathcal{R}_2}) + (\bar\partial^*_\alpha f, \overline{\tilde{\mathcal{K}}^*}) + (\bar\partial^*_\alpha f, \overline{\mathcal{R}_2}) + Z_1 f, \\ \partial_\zeta \tilde{\mathcal{N}} &= \tilde{\mathcal{K}} + \mathcal{R}_2, \\ \partial^*_\zeta \tilde{\mathcal{N}} &= \tilde{\mathcal{K}}^* + \mathcal{R}_2, \end{aligned}$$

wobei die $\mathcal{R}_2$ für verschiedene $\mathcal{Z}_2$-Kerne stehen, die noch $\partial_\zeta \mathcal{R}_2 = \mathcal{Z}_1$ erfüllen.

Dann ist $\tilde K$ der Hauptteil des kanonischen Lösungsoperators K und $\tilde N$ der Hauptteil des Neumannoperators N, es gibt also asymptotische Z-Operatoren Z^a_2 und Z^a_3 von höherer Ordnung, so daß

$$N = \tilde N + Z^a_3 \qquad \text{und} \qquad K = \tilde K + Z^a_2.$$

Wir möchten dieses mit unserem Wissen über $L^2_\alpha(D)$ aus Satz II 63 verbinden:

Satz. Es sei $\mathbf{K}_\alpha$ der kanonische Lösungsoperator der $\bar\partial$-Gleichung in $L^2_\alpha(D)$ und $\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha-1}$ der kanonischen Lösungsoperator in $L^2_{\alpha-1}(\tilde D)$. Ebenso seien $\mathbf{N}_\alpha$ und $\tilde{\mathbf{N}}_{\alpha-1}$ die Neumannoperatoren in $L^2_\alpha(D)$ bzw. $L^2_{\alpha-1}(\tilde D)$. Dann gilt

$$(\tilde{\mathbf{K}}^b_{\alpha-1})' = \mathbf{K}_\alpha \qquad \text{und} \qquad (\tilde{\mathbf{N}}^b_{\alpha-1})' = \mathbf{N}_\alpha.$$

In L^2_α genügt es also, ein Analogon des Theorem für die Randwerte der Operatoren $\mathbf{N}_\alpha$ und $\mathbf{K}_\alpha$ im richtigen Raum aufzustellen, das lautet:

Theorem 1. *Es seien $\tilde{\mathcal{K}}_{\alpha-1}(\zeta, z)$ und $\tilde N_{\alpha-1}(\zeta, z)$ die Kerne zulässiger Operatoren $\tilde K$ vom Typ (2,1) bzw. $\tilde N$ vom Typ (4,2) oder höher in $L^2_{\alpha-1}(\tilde D)$. $\tilde{\mathcal{K}}^*_{\alpha-1}$ sei der adjungierte Kern zu $\tilde{\mathcal{K}}_{\alpha-1}$, und für alle $f \in L^2_{\alpha-1}(\tilde D) \cap \operatorname{dom}\bar\partial \cap \operatorname{dom}\bar\partial^*_\alpha$ gelte*

i) $\tilde f = (\bar\partial \tilde f, \overline{\tilde{\mathcal{K}}_{\alpha-1}})_{\alpha-1} + (\bar\partial \tilde f, \overline{\mathcal{A}^1})_{\alpha-1} + (\bar\partial^*_{\alpha-1} \tilde f, \overline{\tilde{\mathcal{K}}^*_{\alpha-1}})_{\alpha-1} + (\bar\partial^*_{\alpha-1}\tilde f, \overline{\mathcal{A}^2})_{\alpha-1} + (\tilde f, \overline{\mathcal{E}})_{\alpha-1}$,

ii) $\partial_\zeta \tilde{\mathcal{N}}^b_{\alpha-1} = \tilde{\mathcal{K}}^b_{\alpha-1} + \mathcal{A}^b$,

iii) $\partial^*_{\alpha-1} \tilde{\mathcal{N}}^b_{\alpha-1} = \tilde{\mathcal{K}}^{*,b}_{\alpha-1} + \mathcal{A}'^b$, *wobei $\mathcal{E}$ glatt auf $D \times D$ ist. Alle Kerne seien so beschaffen, daß sie invariante Formen in $\tilde{D}$ auf invariante Formen auf $b\tilde{D}$ abbilden und stetige Operatoren auf $L^2_\alpha(D)$ induzieren. Die Fehlerkerne (welche wir generisch mit $\mathcal{A}$ bezeichnen) seien jeweils mindestens von um 1 höheren Typ als die zugehörigen Hauptkerne, d. h. $\mathcal{A}^1$ und $\mathcal{A}^b$ seien vom Typ $(3,2)$, $\mathcal{A}^2$ und $\mathcal{A}'^b$ seien vom Typ $(4,2)$. Außerdem seien sie von einer Form, so daß auch $\partial_\zeta \mathcal{A}$ jeweils noch einen stetigen Operator auf L^2_α induziert.*[14]

Dann ist

$$K'_\alpha := \mathcal{R}\tilde{K}^b_{\alpha-1} \qquad \text{der Hauptteil des kanonischen Lösungsoperators } \mathbf{K}_\alpha,$$

und

$$N'_\alpha := \mathcal{R}\tilde{N}^b_{\alpha-1} \qquad \text{der Hauptteil des Neumannoperators } \mathbf{N}_\alpha.$$

Ihre Kerne sind

$$\mathcal{K}'_\alpha := \mathcal{R}M_\alpha \tilde{\mathcal{K}}^b_{\alpha-1},$$

und

$$\mathcal{N}'_\alpha := \mathcal{R}M_\alpha \tilde{\mathcal{N}}^b_{\alpha-1}.$$

Bevor wir den eigentlichen Beweis beginnen, zeigen wir zunächst unter Verwendung der Voraussetzung *i)* einige Eigenschaften der exakten Operatoren $\mathbf{K}_\alpha$, $\mathbf{N}_\alpha$ und $\mathbf{P}_\alpha$, die sicherstellen, daß wir mit ihren Randwerten arbeiten dürfen.

Lemma 2. *Für $\mathbf{K}_\alpha$, $\mathbf{P}_\alpha$ und $\mathbf{K}^*_\alpha$ gilt*

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_\alpha &: \mathcal{E}_{0,q}(\overline{D}) \cap \ker \bar\partial \;\to\; \mathcal{E}_{0,q}(\overline{D}) \cap \ker \bar\partial^*_\alpha, && \text{für } 1 \le q \le n,\\
\mathbf{P}_\alpha &: \mathcal{E}_{0,0}(\overline{D}) \;\to\; \mathcal{E}_{0,0}(\overline{D}) \cap \ker \bar\partial, &&\\
\mathbf{K}^*_\alpha &: \mathcal{E}_{0,q}(\overline{D}) \cap \ker \bar\partial^*_\alpha \;\to\; \mathcal{E}_{0,q+1}(\overline{D}) \cap \ker \bar\partial, && \text{für } 0 \le q \le n-1.
\end{aligned}$$

Beweis. Daß

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_\alpha &: L^2_\alpha(D) \to \operatorname{dom} \bar\partial \cap \ker \bar\partial^*_\alpha,\\
\mathbf{P}_\alpha &: L^2_\alpha(D) \to \ker \bar\partial,\\
\mathbf{K}^*_\alpha &: L^2_\alpha(D) \to \ker \bar\partial \cap \operatorname{dom} \bar\partial^*_\alpha
\end{aligned}$$

gilt, ist nach Definition der Operatoren klar. Wir müssen also für die Formen im jeweiligen Bild nur noch die Glattheit bis zum Rand des Gebiets zeigen.

[14] Nach Lemma II 28 ist gesichert, daß $\partial_\zeta \mathcal{A}$ für die verschiedenen $\mathcal{A}$-Kerne jeweils mindestens Typ $(2,1)$ bzw. $(3,1)$ hat, was analog zum Kriterium $\partial_\zeta \mathcal{R}_2 = \mathcal{Z}_1$ im Theorem vom Lieb und Michel zu sehen ist. Im Gegensatz zur dortigen Situation können wir daraus jedoch nicht die Stetigkeit der Operatoren schließen, ohne zusätzliche Eigenschaften der Kernstruktur zu kennen.

Dazu untersuchen wir zunächst $\mathbf{K}_\alpha$ auf der Menge $\mathcal{E}_{0,q}(\overline{D}) \cap \ker \bar\partial$. Für solche f ist $\tilde f \in L^2_{\alpha-1}$ und $\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f} \in L^2_{\alpha-1}$, also nach $i)$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f} &= (\bar\partial\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f}, \overline{\tilde{\mathcal{K}}_{\alpha-1}}) + (\bar\partial\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f}, \overline{\mathcal{A}_2}) + (\bar\partial^*_{\alpha-1}\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f}, \overline{\tilde{\mathcal{K}}^*_{\alpha-1}}) + (\bar\partial^*_{\alpha-1}\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f}, \overline{\mathcal{A}_2}) + (\mathbf{K}_\alpha f, \overline{\mathcal{E}}) \\
&= (\widetilde{\bar\partial\mathbf{K}_\alpha f}, \overline{\tilde{\mathcal{K}}_{\alpha-1}}) + (\widetilde{\bar\partial\mathbf{K}_\alpha f}, \overline{\mathcal{A}_2}) + (\widetilde{\bar\partial^*_\alpha\mathbf{K}_\alpha f}, \overline{\tilde{\mathcal{K}}^*_{\alpha-1}}) + (\widetilde{\bar\partial^*_\alpha\mathbf{K}_\alpha f}, \overline{\mathcal{A}_2}) + (\mathbf{K}_\alpha f, \overline{\mathcal{E}}) \\
&= (\tilde f, \overline{\mathcal{K}_{\alpha-1}}) + (\tilde f, \overline{\mathcal{A}_2}) + (\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f}, \overline{\mathcal{E}})
\end{aligned}$$

denn es sind $\bar\partial^*_\alpha\mathbf{K}_\alpha \equiv 0$ und $\bar\partial\mathbf{K}_\alpha f = f$, weil $\mathbf{K}_\alpha$ kanonischer Lösungsoperator zu $\bar\partial$ ist. Insbesondere wissen wir aber nach Theorem II 106, daß die expliziten Operatoren $\mathcal{K}_{\alpha-1}, \mathcal{A}_2 : \mathcal{E}(\overline{D}) \to \mathcal{E}(\overline{D})$ und $\mathcal{Z}'_\infty : L^2_\alpha(D) \to \mathcal{E}(\overline{D})$ abbilden, also ist die rechte Seite glatt und die Behauptung gezeigt.

Um das Ergebnis für $\mathbf{P}_\alpha$ zu erhalten, wenden wir die Homotopie von $\mathbf{K}_\alpha$ auf eine Funktion $f \in \mathcal{E}_{0,0}(\overline{D})$ an. Sie lautet dann

$$\mathbf{K}_\alpha\bar\partial f = f - \mathbf{P}_\alpha f$$

und da f und $\mathbf{K}_\alpha\bar\partial f$ glatt bis zum Rand des Gebiets sind, gilt dies auch für $\mathbf{P}_\alpha f$.

Für $\mathbf{K}^*_\alpha$ gehen wir wie bei $\mathbf{K}_\alpha$ vor: Es gilt für $f \in \mathcal{E}_{0,q}(\overline{D}) \cap \ker \bar\partial^*_\alpha$ mit $0 \le q \le n-1$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{K}^*_\alpha f} &= (\bar\partial\widetilde{\mathbf{K}^*_\alpha f}, \overline{\tilde{\mathcal{K}}_{\alpha-1}}) + (\bar\partial\widetilde{\mathbf{K}^*_\alpha f}, \overline{\mathcal{A}_2}) + (\bar\partial^*_{\alpha-1}\widetilde{\mathbf{K}^*_\alpha f}, \overline{\tilde{\mathcal{K}}^*_{\alpha-1}}) + (\bar\partial^*_{\alpha-1}\widetilde{\mathbf{K}^*_\alpha f}, \overline{\mathcal{A}_2}) + (\mathbf{K}^*_\alpha f, \overline{\mathcal{E}}) \\
&= (\widetilde{\bar\partial\mathbf{K}^*_\alpha f}, \overline{\tilde{\mathcal{K}}_{\alpha-1}}) + (\widetilde{\bar\partial\mathbf{K}^*_\alpha f}, \overline{\mathcal{A}_2}) + (\widetilde{\bar\partial^*_\alpha\mathbf{K}^*_\alpha f}, \overline{\tilde{\mathcal{K}}^*_{\alpha-1}}) + (\widetilde{\bar\partial^*_\alpha\mathbf{K}^*_\alpha f}, \overline{\mathcal{A}_2}) + (\mathbf{K}^*_\alpha f, \overline{\mathcal{E}}) \\
&= (\tilde f, \overline{\mathcal{K}_{\alpha-1}}) + (\tilde f, \overline{\mathcal{A}_2}) + (\widetilde{\mathbf{P}_\alpha f}, \overline{\mathcal{K}_{\alpha-1}}) + (\widetilde{\mathbf{P}_\alpha f}, \overline{\mathcal{A}_2}) + (\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f}, \overline{\mathcal{E}})
\end{aligned}$$

denn es ist $\bar\partial^*_\alpha f = 0$ nach Voraussetzung und $\bar\partial\mathbf{K}^*_\alpha \equiv 0$ nach Definition von $\mathbf{K}^*_\alpha$. Außerdem ist nach dem vorherigen Ergebnis $\mathbf{P}_\alpha f$ für $q = 0$ glatt bis zum Rand, bzw. für $q \ge 1$ ist sogar $\mathbf{P}_\alpha f = 0$. Weil wiederum alle expliziten Operatoren Glattheit erhalten, bzw. der $\mathcal{E}$-Kern sogar L^2_α auf $\mathcal{E}(\overline{D})$ abbildet, ist $\mathbf{K}^*_\alpha f \in \mathcal{E}_{0,q+1}(\overline{D})$ und die Aussage gezeigt.

Satz 3. *Für $\mathbf{K}_\alpha$, $\mathbf{K}^*_\alpha$ und $\mathbf{N}_\alpha$ gilt:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_\alpha : \mathcal{E}_{0,q}(\overline{D}) &\to \mathcal{E}_{0,q-1}(\overline{D}) \cap \ker \bar\partial^*_\alpha && \text{für } 1 \le q \le n, \\
\mathbf{K}^*_\alpha : \mathcal{E}_{0,q}(\overline{D}) &\to \mathcal{E}_{0,q+1}(\overline{D}) \cap \ker \bar\partial && \text{für } 0 \le q \le n-1, \\
\mathbf{N}_\alpha : \mathcal{E}_{0,q}(\overline{D}) &\to \mathcal{E}_{0,q}(\overline{D}) && \text{für } 0 \le q \le n,
\end{aligned}$$

Insbesondere besitzen alle drei Operatoren Randwerte, wenn sie auf Formen $f \in \mathcal{E}(\overline{D})$ wirken.

Beweis. Wiederum müssen wir aufgrund der Definition der Operatoren nur die Glattheit der Formen im Bildraum beweisen. Es sei dazu $f \in \mathcal{E}_{0,q}(\overline{D})$ mit $q \ge 1$. Dann erhalten wir wiederum nach $i)$ und mittels der Beziehung $\bar\partial\mathbf{K}_\alpha f + \mathbf{K}_\alpha\bar\partial f = f$, daß

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f} &= (\bar\partial\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f}, \overline{\tilde{\mathcal{K}}_{\alpha-1}}) + (\bar\partial\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f}, \overline{\mathcal{A}_2}) + (\bar\partial^*_{\alpha-1}\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f}, \overline{\tilde{\mathcal{K}}^*_{\alpha-1}}) + (\bar\partial^*_{\alpha-1}\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f}, \overline{\mathcal{A}_2}) + (\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f}, \overline{\mathcal{E}}) \\
&= (\tilde f, \overline{\mathcal{K}_{\alpha-1}}) + (\tilde f, \overline{\mathcal{A}_2}) - (\widetilde{\mathbf{K}_\alpha\bar\partial f}, \overline{\tilde{\mathcal{K}}^*_{\alpha-1}}) - (\widetilde{\mathbf{K}_\alpha\bar\partial f}, \overline{\mathcal{A}_2}) + (\widetilde{\mathbf{K}_\alpha f}, \overline{\mathcal{E}}).
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\bar{\partial} f \in \mathcal{E}(\overline{D}) \cap \ker \bar{\partial}$, also ist $\mathbf{K}_\alpha \bar{\partial} f \in \mathcal{E}(\overline{D})$ nach Lemma 2. Da wir von den expliziten Operatoren wissen, daß sie Glattheit erhalten, ist $\mathbf{K}_\alpha f \in \mathcal{E}(\overline{D})$ und die erste Aussage damit gezeigt.

Wiederum analog zeigt man die Aussage für $\mathbf{K}_\alpha^*$, wobei man benutzt, daß $\bar{\partial}_\alpha^*$ ein Differentialoperator erster Ordnung mit glatten Koeffizienten ist, also insbesondere $\bar{\partial}_\alpha^* f \in \mathcal{E}(\overline{D}) \cap \ker \bar{\partial}_\alpha^*$ für $f \in \mathcal{E}(\overline{D})$ gilt.

Um die Abbildungseigenschaft für $\mathbf{N}_\alpha$ zu zeigen, benutzen wir wiederum die Darstellung

$$\mathbf{N}_\alpha = \mathbf{K}_\alpha \mathbf{K}_\alpha^* + \mathbf{K}_\alpha^* \mathbf{K}_\alpha$$

und verwenden für die beiden Terme zunächst die Aussagen *i*) und *ii*) dieses Satzes und für die entstehenden Formen jeweils Lemma 2.

1.2 Der Beweis des Theorems

Wir beweisen nun das zentrale Theorem des vorherigen Abschnitts:

Beweis (Theorem 1)**.** Es sei zunächst $f \in \mathcal{E}(\overline{D})$. Dann ist $\tilde{f} \in \mathcal{E}(\tilde{D})$ und besitzt insbesondere stetige Randwerte $\tilde{f}_t$. Wir wenden die Homotopie *i*) auf $\tilde{f}$ an und bilden auf beiden Seiten der Gleichung die Randwerte, wobei wir verwenden, daß für alle auftretenden Operatoren Distributions- und Restriktionsrandwerte bei der Anwendung auf glatte Formen übereinstimmen:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_t &= (\bar{\partial}\tilde{f}, \overline{\tilde{\mathcal{K}}^{*,b}_{\alpha-1}})_{\alpha-1} + (\bar{\partial}\tilde{f}, \overline{\mathcal{A}^b_2})_{\alpha-1} + (\bar{\partial}^*_{\alpha-1}\tilde{f}, \overline{\tilde{\mathcal{K}}^b_{\alpha-1}})_{\alpha-1} + (\bar{\partial}^*_{\alpha-1}\tilde{f}, \overline{\mathcal{A}^b_2})_{\alpha-1} + (\tilde{f}, \overline{\tilde{\mathcal{E}}^b})_{\alpha-1} \\ &= (\bar{\partial} f, \overline{M_\alpha \tilde{\mathcal{K}}^{*,b}_{\alpha-1}})_\alpha + (\bar{\partial} f, \overline{M\mathcal{A}^b_2})_\alpha + (\bar{\partial}^*_\alpha f, \overline{M_\alpha \tilde{\mathcal{K}}^b_{\alpha-1}})_\alpha + (\bar{\partial}^*_\alpha f, \overline{M_\alpha \mathcal{A}^b_2})_\alpha + (f, \overline{M_\alpha \tilde{\mathcal{E}}^b})_\alpha.\end{aligned}$$

Anschließend führen wir den Dimensionswechsel von $b\tilde{D}$ nach D durch. In den Kernen und auf f wenden wir jeweils den Operator $\mathcal{R}$ an. So erhalten wir Kerne $\mathcal{K}' := \mathcal{R} M_\alpha \tilde{\mathcal{K}}^b_{\alpha-1}$ und $\mathcal{N}' := \mathcal{R} M_\alpha \tilde{\mathcal{N}}^b_{\alpha-1}$ mit den Beziehungen

$$f = (\bar{\partial} f, \overline{\mathcal{K}'^*})_\alpha + (\bar{\partial} f, \overline{\mathcal{A}'_2})_\alpha + (\bar{\partial}^*_\alpha f, \overline{\mathcal{K}'})_\alpha + (\bar{\partial}^*_\alpha f, \overline{\mathcal{A}'_2})_\alpha + (f, \overline{\mathcal{E}'})_\alpha. \qquad (i')$$

In *ii*) und *iii*) wenden wir ebenfalls $\mathcal{R} M_\alpha$ an und erhalten

$$\partial_\zeta \mathcal{N}' = \mathcal{K}'^* + \mathcal{A}'_2 \qquad (ii')$$

$$\partial^*_\alpha \mathcal{N}' = \mathcal{K}' + \mathcal{A}'_2 \qquad (iii')$$

wobei die generischen Fehlerkerne $\mathcal{A}'_2$ durch den Dimensionsübergang aus den jeweiligen Fehlertermen in *i*), *ii*) oder *iii*) entstehen, ebenso $\mathcal{E}'$, dessen Kern selbst nicht mehr notwendig glatt sein muß, aber nach Theorem II 106 auf jeden Fall ebenfalls L^2_α in $\mathcal{E}(\overline{D})$ abbildet. Wir benennen Operatoren von dieser Art mit Z'_∞.

Mit i') bis iii') haben wir eine Situation hergestellt, wie sie in Theorem I 90 vorausgesetzt wird, jedoch sind alle auftretenden Kerne hier transformiert zulässig statt zulässig oder isotrop.

Insbesondere sind auch die Fehlerterme und ihre Ableitungen transformiert zulässig. Der Rest des Beweises kann daher größtenteils dem Weg von Lieb und Michel folgen:

Da wir mit $f \in \mathcal{E}$ insbesondere $f \in \operatorname{dom} \Box$ vorausgesetzt haben, ergibt sich aus $i)$, $ii)$ und $iii)$ weiterhin

$$\begin{aligned} f &= (\bar\partial f, \overline{\mathcal{K}'})_\alpha + (\bar\partial f, \overline{\mathcal{A}'_2})_\alpha + (\bar\partial^*_\alpha f, \overline{\mathcal{K}'^*})_\alpha + (\bar\partial^*_\alpha f, \overline{\mathcal{A}'_2})_\alpha + (f, \overline{\mathcal{E}'})_\alpha \\ &= (\bar\partial f, \overline{\partial \mathcal{N}'})_\alpha + (\bar\partial f, \overline{\mathcal{A}'_2})_\alpha + (\bar\partial^*_\alpha f, \overline{\partial^* \mathcal{N}'})_\alpha + (\bar\partial^*_\alpha f, \overline{\mathcal{A}'_2})_\alpha + (f, \overline{\mathcal{E}'})_\alpha \\ &= (\Box f, \overline{\mathcal{N}'})_\alpha + (\bar\partial f, \overline{\mathcal{A}'_2})_\alpha + (\bar\partial^*_\alpha f, \overline{\mathcal{A}'_2})_\alpha + (f, \overline{\mathcal{E}'})_\alpha \\ &= (\Box f, \overline{\mathcal{N}'})_\alpha + Z'_2 \bar\partial f + Z'_2 \bar\partial^*_\alpha f + Z'_\infty f \end{aligned} \tag{4}$$

Um die Terme mit Hilfe von Z^T-Operatoren untersuchen zu können, konstruieren wir eine asymptotische Darstellung von $\bar\partial f$:

Lemma 5. *Es sei $f \in \mathcal{E}(\overline{D})$. Dann gibt es für beliebig hohes $k \in \mathbb{N}$ quasi-transformierte Z-Operatoren Z'_1, Z''_1 und Z'_k, Z''_k vom bezeichneten Typ (1) bzw. (k), so daß*

$$\bar\partial f = Z'_1 \Box f + Z'_k \bar\partial f.$$

und

$$\bar\partial^*_\alpha f = Z''_1 \Box f + Z''_k \bar\partial^*_\alpha f$$

gilt.[15]

Beweis. Wir zeigen die erste Gleichung. Dazu wenden wir $i')$ auf die Form $\bar\partial f$ an:

$$\begin{aligned} \bar\partial f &= (\bar\partial^*_\alpha \bar\partial f, \overline{\mathcal{K}'^*})_\alpha + (\bar\partial^*_\alpha \bar\partial f, \overline{\mathcal{A}'_2})_\alpha + (\bar\partial f, \overline{\mathcal{E}'})_\alpha \\ &= (\bar\partial^*_\alpha \bar\partial f, \overline{\partial^*_\alpha \mathcal{N}'})_\alpha + (\bar\partial^*_\alpha \bar\partial f, \overline{\mathcal{A}'_2})_\alpha + (\bar\partial f, \overline{\mathcal{E}'})_\alpha \\ &= (\Box f, \overline{\partial^*_\alpha \mathcal{N}'})_\alpha - (\bar\partial \bar\partial^*_\alpha f, \overline{\partial^*_\alpha \mathcal{N}'})_\alpha + (\bar\partial f, \overline{\partial \mathcal{A}'_2})_\alpha + (\bar\partial f, \overline{\mathcal{E}'})_\alpha \\ &= Z'_1 \Box f + Z'_1 \bar\partial f. \end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt haben, daß $(\bar\partial \bar\partial^*_\alpha f, \overline{\partial^* \mathcal{N}'})_\alpha = (\bar\partial \bar\partial \bar\partial^*_\alpha f, \overline{\mathcal{N}'})_\alpha = 0$ und $\partial_\zeta \mathcal{A}'_2 = \mathcal{A}'_1$. Indem wir die entstandene Identität in sich selbst einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} &= Z'_1 \Box f + Z'_1 (Z'_1 \Box f + Z'_1 \bar\partial f) \\ &= (Z'_1 + Z'_2) \Box f + Z'_2 \bar\partial f \\ &= Z'_1 \Box f + Z'_2 \bar\partial f, \end{aligned}$$

und nach insgesamt k-fachem Iterieren ergibt sich die Aussage des Lemmas. Die zweite Gleichung folgt analog, wenn wir die Rechnung mit $\bar\partial^*_\alpha f$ wiederholen.

[15] Obwohl sie das gleiche Bildungsschema wie transformierte Z-Operatoren besitzen, können wir die entstehenden Operatoren nicht als solche bezeichnen, da wir keine ausreichenden Aussagen über ihren Typ besitzen. Im nächsten Kapitel werden wir jedoch feststellen, daß sie zumindest transformierte Z-Operatoren im erweiteren Sinn sind.

Der Beweis von Theorem 1 läßt sich nun abschließen: Wir setzen die Beziehung aus Lemma 5 in Gleichung (4) ein und bezeichnen die Kombination des Z_1'-Term mit N' als Z_3'. So erhalten wir für beliebig hohes $k \in \mathbb{N}$:

$$f = (\Box f, \overline{\mathcal{N}'})_\alpha + Z_3' \Box f + Z_k' \bar{\partial} f + Z_k' \bar{\partial} f + Z_\infty' f, \tag{6}$$

wobei auch der Operator Z_3' von k abhängt. Insbesondere beinhaltet er stets eine Anwendung von $\mathcal{N}'$, ist jedoch von höherem Typ, so daß es sinnvoll ist, ihn als Fehlerterm gegenüber $\mathcal{N}'$ anzusehen.

Um nun zu zeigen, daß $N'f$ den Hauptteil von $\mathbf{N}_\alpha f$ beschreibt, wenden wir Identität (6) für $f \in \mathcal{E}(\overline{D})$ auf den exakten Wert $\mathbf{N}_\alpha f$ an. Dies ist möglich, da $\mathbf{N}_\alpha f$ nach Satz 3 glatt ist. Wir nutzen aus, daß $\Box \mathbf{N}_\alpha f = f$ gilt und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_\alpha f &= (\Box \mathbf{N}_\alpha f, \overline{\mathcal{N}'})_\alpha + Z_3' \Box \mathbf{N}_\alpha f + Z_j' \bar{\partial} \mathbf{N}_\alpha f + Z_k' \bar{\partial}_\alpha^* \mathbf{N}_\alpha f + Z_\infty' \mathbf{N}_\alpha f \\ &= (f, \overline{\mathcal{N}'})_\alpha + Z_3' f + Z_j' \bar{\partial} \mathbf{N}_\alpha f + Z_K' \bar{\partial}_\alpha^* \mathbf{N}_\alpha f + Z_\infty' \mathbf{N}_\alpha f \\ &= N' f + Z_3'^a f, \end{aligned} \tag{7}$$

denn, da $\mathbf{N}_\alpha, \bar{\partial} \mathbf{N}_\alpha : L_\alpha^2 \to L_\alpha^2$ beschränkte Operatoren sind, identifizieren wir den gesamten Restterm als von der Form eines asymptotisch transformierten Operators und nennen ihn $Z_3'^a$.[16]

Um die Aussage für beliebige $f \in L_\alpha^2(D)$ zu verifizieren, benötigen wir die Stetigkeit der Operatoren bezüglich $||.||_\alpha$. Dabei sind $\bar{\partial} \mathbf{N}_\alpha$, $\bar{\partial}_\alpha^* \mathbf{N}_\alpha$ und $\mathbf{N}_\alpha$ sind ohnehin L_α^2-stetig, ebenso Z_∞', da letzteres aus einem Kern entsteht, der $C^\infty(\overline{D})$-glatt ist. Es bleibt, die Stetigkeit des $Z_3'^a$-Term zu klären. Dieser entsteht durch die iterierte Anwendung von Operatoren, welche aus $\mathcal{N}$ oder den ursprünglichen $\mathcal{A}$-Kernen und deren Ableitungen $\partial_\zeta \mathcal{A}^1$ bzw. $\partial_\zeta A^2$ entstehen. Diese hatten wir im Theorem als stetig vorausgesetzt.

Es sind also alle vorkommenden Operatoren stetig, und aufgrund der Dichtheit von $\mathcal{E}$ in $L_\alpha^2(D)$ ist der Beweis der Aussage über N' damit abgeschlossen.

Zum Beweis der Aussage über K' führen wir eine ähnliche Konstruktion nun für $\mathbf{K}_\alpha = \bar{\partial}_\alpha^* \mathbf{N}_\alpha$ und $\mathbf{K}_\alpha^* = \bar{\partial} \mathbf{N}_\alpha$ durch. Für $f \in \mathcal{E}(\overline{D})$ setzen wir in i') ein, was wiederum aufgrund von Satz 3 möglich ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\alpha f &= (\bar{\partial} \mathbf{K}_\alpha f, \overline{\mathcal{K}'})_\alpha + (\bar{\partial} \mathbf{K}_\alpha f, \overline{\mathcal{A}_2'})_\alpha + (\bar{\partial}_\alpha^* \mathbf{K}_\alpha f, \overline{\mathcal{K}'^*})_\alpha + (\bar{\partial}_\alpha^* \mathbf{K}_\alpha f, \overline{\mathcal{A}_2'})_\alpha + (\mathbf{K}_\alpha f, \overline{\mathcal{E}'})_\alpha \\ &= (\bar{\partial} \bar{\partial}_\alpha^* \mathbf{N}_\alpha f, \overline{\partial \mathcal{N}' + \mathcal{A}_2'})_\alpha + (\mathbf{K}_\alpha f, \overline{\mathcal{E}'})_\alpha \\ &= (\Box \mathbf{N}_\alpha f, \overline{\partial \mathcal{N}' + \mathcal{A}_2'})_\alpha - (\bar{\partial}_\alpha^* \bar{\partial} \mathbf{N}_\alpha f, \overline{\partial \mathcal{N}' + \mathcal{A}_2'})_\alpha + (\mathbf{K}_\alpha f, \overline{\mathcal{E}'})_\alpha \\ &= (f, \overline{\partial \mathcal{N}'})_\alpha + (f, \overline{\mathcal{A}_2'})_\alpha - (\bar{\partial} \mathbf{N}_\alpha f, \overline{\partial \mathcal{A}_2'})_\alpha + (\mathbf{K}_\alpha f, \overline{\mathcal{E}'})_\alpha \\ &= (f, \overline{\mathcal{K}'})_\alpha + Z_2' f + Z_1' \mathbf{K}_\alpha^* f + Z_\infty' \mathbf{K}_\alpha f, \end{aligned} \tag{8}$$

[16] Es zeigt sich später, daß $Z_3'^a$ nur asymptotisch transformiert im erweiterten Sinn ist, doch wir behalten die Schreibweise bei, da wir für diese keine neue Notation eingeführt hatten.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_\alpha^* f &= (\bar\partial \mathbf{K}_\alpha^* f, \overline{\mathcal{K}'})_\alpha + (\bar\partial \mathbf{K}_\alpha^* f, \overline{\mathcal{A}_2'})_\alpha + (\bar\partial_\alpha^* \mathbf{K}_\alpha^* f, \overline{\mathcal{K}'^*})_\alpha + (\bar\partial_\alpha^* \mathbf{K}_\alpha^* f, \overline{\mathcal{A}_2'})_\alpha + (\mathbf{K}_\alpha^* f, \overline{\mathcal{E}'})_\alpha \\
&= (\bar\partial_\alpha^* \bar\partial \mathbf{N}_\alpha f, \overline{\partial^* \mathcal{N}'})_\alpha + (\bar\partial_\alpha^* \mathbf{K}_\alpha^* f, \overline{\mathcal{A}_2'})_\alpha + (\mathbf{K}_\alpha^* f, \overline{\mathcal{E}'})_\alpha \\
&= (\square \mathbf{N}_\alpha f, \overline{\partial^* \mathcal{N}'})_\alpha - (\bar\partial \bar\partial_\alpha^* \mathbf{N}_\alpha f, \overline{\partial^* \mathcal{N}'})_\alpha + (\mathbf{K}_\alpha^* f, \overline{\partial \mathcal{A}_2'})_\alpha + (\mathbf{K}_\alpha^* f, \overline{\mathcal{E}'})_\alpha \\
&= (f, \overline{\partial^* \mathcal{N}'})_\alpha + Z_1' \mathbf{K}_\alpha^* f \\
&= (f, \overline{\mathcal{K}'^*})_\alpha + Z_2' f + Z_1' \mathbf{K}_\alpha^* f,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

und durch iteriertes Einsetzen erreichen wir für beliebiges $j, k \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_\alpha f &= (f, \overline{\mathcal{K}'})_\alpha + Z_2' f + Z_j' \mathbf{K}_\alpha f + Z_k' \mathbf{K}_\alpha^* f, \\
\mathbf{K}_\alpha^* f &= (f, \overline{\mathcal{K}'^*})_\alpha + Z_2' f + Z_k' \mathbf{K}_\alpha^* f,
\end{aligned}
$$

wobei die Operatoren Z_2' von k und l abhängen, also mit Notation wie in Gleichung (7)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_\alpha f &= K' f + Z_2'^a f, \\
\mathbf{K}_\alpha^* f &= K'^* f + Z_2'^a
\end{aligned}
$$

für alle $f \in \mathcal{E}(\overline{D})$. Wiederum sind alle beteiligten Operatoren aufgrund der Voraussetzungen stetig auf L_α^2, und die Aussage folgt daher für alle Formen in $L_\alpha^2(D)$.

Insgesamt haben wir gezeigt, daß sich N' und K' von $\mathbf{N}_\alpha$ und $\mathbf{K}_\alpha$ nur durch Fehlerterm höherer Ordnung unterscheiden, der den gleichen Aufbau wie ein asymptotisch zulässiger Operator hat. Wir haben also $\mathcal{N}'$ und $\mathcal{K}$' als die Hauptteile der Operatoren $\mathbf{K}_\alpha$ und $\mathbf{N}_\alpha$ identifiziert.

2 Explizite Formeln für $\mathbf{N}_\alpha^b$ und $\mathbf{N}_\alpha$

2.1 Eine Homotopieformel für $\bar\partial$ in den Räumen $L^2_\alpha(D)$

Um Theorem 1 anwenden zu können, konstruieren wir nun explizite Integraloperatoren, die den dortigen Voraussetzungen genügen. Wir verwenden dazu die Methode von Berndtsson und Andersson zum Gewinn gewichteter Homotopieformeln [BeA 83]:

Theorem 10 (Berndtsson–Andersson)**.** *Es seien Abbildungen*

$$\begin{aligned} s &= (s_1, \ldots, s_n) : \overline{D} \times \overline{D} \to \mathbb{C}^n, \\ Q &= (Q_1, \ldots, Q_n) : \overline{D} \times \overline{D} \to \mathbb{C}^n, \\ G &: M \to \mathbb{C} \end{aligned}$$

gewählt, so daß

- $s \in C^1(\overline{D} \times \overline{D}; \mathbb{C}^n)$ *mit*

  $$|s(\zeta, z)| \lesssim |\zeta - z|$$

  und

  $$|s \cdot (\zeta - z)| \gtrsim |\zeta - z|^2$$

  jeweils gleichmäßig für $\zeta \in \overline{D}$ *und* $z \in K$ *für jedes* $K \subset\subset D$,

- $Q \in C^1(\overline{D} \times \overline{D}; \mathbb{C}^n)$, *so daß alle* $Q_j(\zeta, z)$ *holomorph in* $z \in D$ *für festes* $\zeta \in D$ *sind,*

- *G holomorph auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet M ist, wobei M das Bild von $\overline{D} \times \overline{D}$ unter der Abbildung*

  $$(\zeta, z) \mapsto Q \cdot (\zeta - z) + 1$$

  enthält.

Aus s und Q definieren wir die $(1,0)$-Formen $\hat{s} := s \cdot d(\zeta - z)$ und $\hat{Q} := Q \cdot d(\zeta - z)$. Dann besteht für jedes $0 \le p \le n$ eine Homotopie vom Koppelmannschen Typ in der Form, daß für $f \in C^1_{p,q}(\overline{D})$ mit $q \ge 1$ die Gleichung

$$f = c_{p,q,n} \left[\int_{bD} f \wedge K_{p,q} + (-1)^{p+q+1} \int_D \bar\partial f \wedge K_{p,q} + (-1)^{p+q}\, \bar\partial_z \int_D f \wedge K_{p,q-1} \right]$$

und für jedes $f \in C^1_{p,0}(\overline{D})$ die Gleichung

$$f = c_{p,0,n} \left[\int_{bD} f \wedge K_{p,0} + (-1)^{p+1} \int_D \bar\partial f \wedge K_{p,0} + (-1)^p \int_D f \wedge P_{p,0} \right]$$

mit Konstanten $c_{p,q,n} = (-1)^{p+q}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n$ *und Integralkernen*

$$K = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} G^{(k)}(Q\cdot(\zeta - z)+1)\frac{\hat{s}\wedge(d\hat{Q})^k \wedge (d\hat{s})^{n-k-1}}{[s\cdot(\zeta - z)]^{n-k}},$$
$$P = (-1)^{n(n-1)/2}\frac{1}{n!}G^{(n)}(Q\cdot(\zeta - z)+1)(d\hat{Q})^n$$

erfüllt ist. Der untere Index eines Kerns in der Homotopieformel bezeichnet in diesem Fall den Grad des Kerns bezüglich der z*-Differentiale.*

Für unserer Situation betrachten wir nur $(0,q)$-Formen und wählen

$$\begin{aligned}
t_j(\zeta,z) &:= \chi\left(\rho_j - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \rho_{jk}\eta_k\right) + (1-\chi)\bar{\eta}_j,\\
s_j(\zeta,z) &:= -(t^\dagger\cdot\eta - r)t_j \qquad \text{für } z\in bD, \text{ wobei } t^\dagger(\zeta,z) = t(z,\zeta),\\
Q_j(\zeta,z) &:= \frac{t_j}{-\rho},\\
G(w) &:= w^{-\alpha},
\end{aligned}$$

mit einer passenden Abschneidefunktion χ ist. In Beispiel *iii*) von [BeA 83] ist die Idee der von uns getroffenen Wahl vorstellt. In [Lam 00] wird die Konstruktion ausführlich erläutert, inklusive der Beweise daß die aus den Formeln gewonnenen Kerne tatsächlich zu einer Homotopierelation führen, obwohl erst noch ein Approximationsprozeß notwendig ist, damit Q den Voraussetzungen genügt. Ebenfalls dort findet sich die Rechnung, um die entstehenden Kerne in eine Form zu bringen, in der sie sich mittels des α-Skalarprodukts schreiben lassen.

Es verbleiben zulässige Kerne $\mathcal{K}_{0,q}$, die für $q\geq 1$ der Homotopie

$$f = (\bar\partial f, \overline{\mathcal{K}_{0,q}})_\alpha + (\bar\partial^*_\alpha f, \overline{\mathcal{K}^*_{0,q-1}})_\alpha + (\bar\partial f, \overline{\mathcal{A}^b_{(3,2)}})_\alpha + (\bar\partial^*_\alpha f, \overline{\mathcal{A}^b_{(4,2)}})_\alpha + (f, \overline{\mathcal{P}_{0,q}})_\alpha$$

genügen. Für $q=0$ erhalten wir die Gleichung

$$f = (\bar\partial f, \overline{\mathcal{K}_{0,0}})_\alpha + (\bar\partial f, \overline{\mathcal{A}^b_{(3,2)}})_\alpha + (f, \overline{\mathcal{P}_{0,0}})_\alpha$$

Die Kerne $\mathcal{K}_{0,q}$ erhalten wir in expliziter Form, wir interessieren uns jedoch nur für ihre Randwerte als Operatoren auf $C^0(\overline{D})$. Deren Hauptteile sind gegeben durch die tangential zulässigen Kerne

$$\mathcal{K}^b_{0,q}(\zeta,z) = \varepsilon_{q+1}\frac{\Gamma(n+\alpha-q-1)}{\Gamma(n+\alpha)}\frac{\partial_\zeta\bar{v}\wedge(\bar\partial_z\partial_\zeta\bar{v}|_t)^q}{v^{n+\alpha-q-1}\bar{v}^{q+1}}, \tag{11}$$

$$\mathcal{K}^{*,b}_{0,q}(\zeta,z) = (-1)^{q+1}\varepsilon_q\frac{\Gamma(n+\alpha-q)}{\Gamma(n+\alpha)}\frac{\bar\partial_z\bar{v}|_t\wedge(\bar\partial_z\partial_\zeta\bar{v}|_t)^{q-1}}{v^{n+\alpha-q}\bar{v}^q}, \tag{12}$$

mit $\varepsilon_q := (-1)^{q(q+1)/2}$. Wir identifizieren diese Kerne als zulässig und vom α-Typ $(2,1)$ bzw. $(3,1)$. Für $q = 0$ ist

$$\mathcal{P}_{0,0}(\zeta, z) = \frac{1}{v^{n+\alpha}} + \mathcal{A}_{(3,1)} \tag{13}$$

zulässig vom Typ $(2,0)$, aber wir können nicht ohne weiteres einen Integralkern für die Distributionsrandwerte des zugehörgen Operator $P_{0,0}$ angeben, da der Kern nicht absolut integrierbar ist und wir kein Kriterium besitzen, wann er Randwerte im Sinne von Definition I 93 besitzt.

Für $q \geq 1$ enthält $\mathcal{P}_{0,q}$ einen Faktor $\bar{\partial}_z \hat{Q}$, und da Q als holomorph in der Nähe der Diagonalen vorausgesetzt wird, verschwindet $\mathcal{P}_{0,q}$ dort. Somit ist klar, daß $\mathcal{P}_{0,q}$ nur ein Fehlerterm mit $\mathcal{E}$-glattem Kern ist, seine Randwerte lassen sich damit einfach durch Einschränkung gewinnen. Da wir die genaue Form von $\mathcal{P}_{0,q}^b$ nicht benötigen, schreiben wir generell $\mathcal{E}^b$ für einen derartigen Kern.

Eine Methode, um zu zeigen, daß aus dieser Homotopieformel die Randwerte des kanonischen Lösungsoperators $\mathbf{K}_\alpha$ für $\bar{\partial}$ gewonnen werden können, wurde bereits in [Lam 00] vorgestellt. Anschließend könnte man einen Kern für den Neumannoperators mit Hilfe von Satz I 89 berechnen. Auf dem von uns gewählten Weg über Theorem 1 kommt man jedoch etwas einfacher ans Ziel, da wir direkt Aussagen über den Neumannoperator erhalten, ohne zusätzliche Eigenschaften über $\mathcal{K}$ beweisen zu müssen.

2.2 Der Kern $\mathcal{N}_q^b$

Wir bilden nun $\tilde{\mathcal{K}}^b$, $\tilde{\mathcal{K}}^{*,b}$ und $\tilde{\mathcal{N}}^b$ nach Formel (11),(12) und (15) im Gebiet $\tilde{D}$, wobei wir in der neu hinzukommenden Komponente des $\tilde{t}$-Vektors auf das Verkleben mit dem euklidischen Abstand mittels der Abschneidefunktion verzichten können, da $\tilde{D}$ bezüglich ξ nach Konstruktion sogar echt konvex ist. Es sei einfach $\tilde{t}_{n+1} = \bar{\xi}$. Anschließend können wir zeigen, daß die entstehenden Kerne tatsächlich den Voraussetzungen von Theorem 1 genügen:

$\tilde{\mathcal{K}}^b$ ist gerade so konstruiert wurde, daß eine passende Homotopieformel erfüllt. Wir zeigen daher als erstes die Beziehung zu $\tilde{\mathcal{N}}^b$. Da diese Eigenschaften unabhängig davon ist, in welchem Gebiet wir die Kerne gebildet haben, zeigen wir die Aussage allgemein für ein Gebiet D statt nur auf $\tilde{D}$.

Satz 14. *Es seien $\mathcal{K}_q^b(\zeta, z)$ und $\mathcal{K}_q^{*,b}(\zeta, z)$ gegeben durch die Formeln* (11) *und* (12). *Es sei der Kern $\mathcal{N}_q^b(\zeta, z)$ definiert als*

$$\mathcal{N}_q^b(\zeta, z) := \begin{cases} -\varepsilon_{q+1}\dfrac{\Gamma(n+\alpha-q-1)}{\Gamma(n+\alpha)q}\dfrac{(\bar{\partial}_z\partial_\zeta\bar{v}|_t)^q}{v^{n+\alpha-q-1}\bar{v}^q} & \text{für } q > 0, \\ \dfrac{\Gamma(n+\alpha-1)}{\Gamma(n+\alpha)}\dfrac{\log\bar{v}}{v^{n+\alpha-1}} & \text{für } q = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Dann gilt

$$\partial_\zeta \mathcal{N}_q^b(\zeta, z) = \mathcal{K}_q^b(\zeta, z) + \mathcal{A}_{(4,2)}^b, \tag{16}$$
$$\partial_\alpha^* \mathcal{N}_q^b(\zeta, z) = \mathcal{K}_q^{*,b}(\zeta, z) + \mathcal{A}_{(4,2)}^b. \tag{17}$$

für zulässige Fehlerterme $\mathcal{A}_{(4,2)}^b$ vom angegebenen Typ.

Der Beweis besteht in einer direkten Rechnung. Dies ist möglich, da unsere Kerne im Gegensatz zur euklidischen Situation wesentlich einfachere Struktur haben: Für $q \geq 1$ ist $\mathcal{N}_q^b$ zulässig vom Typ $(4, 2)$; für $q = 0$ ist er wegen des auftretenden Terms $\log\bar{v}$ nicht wirklich zulässig, zeigt aber im Grund gleiches Verhalten, insbesondere unter Ableitungen.[17]

Wir führen zunächst als allgemeine Bezeichnungen ein:

Definition 18. In einer Umgebung eines jeden Randpunkt ζ_0 sei

$$\mathfrak{E} := (e_1, \ldots, e_n)$$

die bereits früher verwendete β-Orthonormalbasis für den Raum der $(1,0)$-Formen, wobei $e_1 = \partial\rho/|\partial\rho|_\beta$ ist. Wenn wir die gleiche Basis bezüglich z statt ζ meinen, schreiben wir e_i^* für $\bar{e}_i(z)$.

Es seien $L_1, \ldots, L_n$, die dualen Vektorfelder zu $\mathfrak{E}$ und $\bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_n$ die zu ihnen komplex konjugierten Felder. Die gleichen Vektorfelder bezüglich der z-Veränderlichen bezeichen wir mit Λ_i bzw. $\bar{\Lambda}_i$.

[17] Die Verwendung von $\log\bar{v}$ ist zunächst überhaupt möglich, weil wir wissen, daß $\operatorname{Re}\bar{v} > 0$ auf ganz $D \times bD$ ist. Bei Größenabschätzungen können wir einen Faktor $|\log\bar{v}|$ stets durch $|\bar{v}|^\varepsilon$ mit beliebig kleinem ε dominieren. Unter Differentiation entsteht aus $\log\bar{v}$ ein zusätzlicher Faktor $\bar{v}^{-1}$, was ebenfalls dem Grenzfall des Verhalten eines $\bar{v}^\varepsilon$ mit sehr kleinem ε entspricht.

Wir können nun die Kerne $\mathcal{K}_q^b$, $\mathcal{K}_q^{*,b}$ und $\mathcal{N}_q^b$ mit diesen Bezeichnungen darstellen:

Satz 19. *Es gilt*

$$\mathcal{K}_q^b(\zeta, z) = c_{n,q,\alpha} \frac{(\sum_{i=1}^n L_i\bar{v}\, e_i) \wedge (\sum_{j=2}^n e_j \wedge e_j^*)^q}{v^{n+\alpha-q-1}\bar{v}^{q+1}} + \mathcal{A}_{(3,2)}^b, \tag{20}$$

$$\mathcal{K}_q^{*,b}(\zeta, z) = (-1)^{q-1} c_{n,q-1,\alpha} \frac{(\sum_{i=2}^n \bar{\Lambda}_i\bar{v}\, e_i^*) \wedge (\sum_{j=2}^n e_j \wedge e_j^*)^{q-1}}{v^{n+\alpha-q}\bar{v}^q} + \mathcal{A}_{(4,2)}^b, \tag{21}$$

$$\mathcal{N}_q^b(\zeta, z) = \frac{-c_{n,q,\alpha}}{q} \frac{(\sum_{j=2}^n e_j \wedge e_j^*)^q}{v^{n+\alpha-q-1}\bar{v}^q} + \mathcal{A}_{(5,3)}^b \qquad \text{für } q \geq 1. \tag{22}$$

mit Konstanten $c_{n,q,\alpha} = \varepsilon_{q+1}\Gamma(n+\alpha-q-1)/\Gamma(n+\alpha)$.

Beweis. Nach Definition gilt

$$\bar{\partial}_\zeta \bar{v} = \sum_{i=1}^n L_i\bar{v}\, e_i.$$

Eine ausführliche Rechnung mit der Definition von $\bar{v}$ zeigt zudem, daß

$$\bar{\partial}_z \partial_\zeta \bar{v} = \sum_{i=1}^n e_i \wedge e_i^* + \mathcal{E}_1.$$

Damit können wir die auftretenden Differentiale auch schreiben als

$$\left[\bar{\partial}_z \partial_\zeta \bar{v}\big|_t\right]^q = \left[\sum_{i=2}^n e_i \wedge e_i^*\right]^q + \mathcal{E}_1,$$

da e_1 die Normalenrichtung angibt, der Tangentialanteil (bzgl. z) sich also dadurch auszeichnet, daß e_1^* fehlt.

2.3 Der Zusammenhang zwischen $\mathcal{N}_q^b$, $\mathcal{K}_q^b$ und $\mathcal{K}_q^{*,b}$

Mit den getroffenen Vorbemerkungen zeigen wir nun die beiden Aussagen von Satz 14. Zunächst beweisen wir Gleichung (16): Für $q = 0$ erhalten wir wegen $\partial_\zeta v = \mathcal{E}_2$, daß

$$\begin{aligned}
\partial_\zeta \mathcal{N}_0^b &= \partial_\zeta \left[c_{n,0,\alpha} \frac{\log \bar{v}}{v^{n+\alpha-1}} \right] \\
&= c_{n,0,\alpha} \frac{\partial_\zeta \bar{v}}{v^{n+\alpha-1}\bar{v}} + \frac{\mathcal{E}_2 \log \bar{v}}{v^{n+\alpha-1}} \\
&= \mathcal{K}_0^b(\zeta, z) + \mathcal{A}_{(4,2)}^b
\end{aligned}$$

Der Kern $\mathcal{A}_{(4,2)}^b$ ist wiederum nicht wirklich tangential zulässig, weil er noch einen Term $\log \bar{v}$ enthält. Da auf dem Fall $q = 0$ ohnehin nicht das Hauptinteresse unserer Betrachtung liegt, untersuchen wir den Kern $\mathcal{A}_{(4,2)}^b$ nicht gesondert.

Für $q > 0$ stellen wir zunächst fest, daß $\partial_\zeta(\bar\partial_z\partial_\zeta\bar v\big|_t)^q = 0$, also (erneut mit $\partial_\zeta v = \mathcal{E}_2$):

$$\begin{aligned}\partial_\zeta \mathcal{N}_q^b &= \partial_\zeta\left[-\frac{c_{n,q,\alpha}}{q}\frac{(\bar\partial_z\partial_\zeta\bar v\big|_t)^q}{v^{n+\alpha-q-1}\bar v^q}\right]\\ &= c_{n,q,\alpha}\frac{\partial_\zeta\bar v\wedge(\bar\partial_z\partial_\zeta\bar v\big|_t)^q}{v^{n+\alpha-q-1}\bar v^{q+1}} + \frac{\mathcal{E}_2}{v^{n+\alpha-q}\bar v^q}\\ &= \mathcal{K}_q^b + \mathcal{A}^b_{(4,2)}.\end{aligned}$$

Für Gleichung (17) benötigen wir einige Schritte mehr. Da $\partial_\alpha^*\mathcal{N}_0^b = 0 = \mathcal{K}_{-1}^b$ müssen wir jedoch nur den Fall $1 \le q \le n$ behandeln.

Eine Formel zur Berechnung von ∂_α^* für $(q,0)$-Formen (und damit $(q,0;r,s)$-Produktformen, denn ∂_α^* wirkt nur bezüglich ζ) gewinnen wir durch Konjugation der Formel für $\bar\partial_\alpha^*$ aus Lemma II 14. Demnach gilt

$$\partial_\alpha^*\mathcal{N}_q^b = -i(\beta-\gamma)\lrcorner_\beta\,\bar\partial\mathcal{N}_q^b + (n+\alpha-q)\bar\partial\rho\lrcorner_\beta\,\mathcal{N}_q^b.$$

Für den zweiten Term erhalten wir aus Formel (22), daß

$$(n+\alpha-q)\bar\partial\rho\lrcorner_\beta\,\mathcal{N}_q^b = \mathcal{A}^b_{(5,3)}$$

da $\bar\partial\rho = \left|\bar\partial\rho\right|_\beta \bar e_1$ ist und der explizite Teil von $\mathcal{N}_q^b$ nach (22) kein e_1-Differential enthält. Der verbleibende Fehlerterm gegenüber $\mathcal{N}_q^b$ war aber vom Typ $(5,3)$, und allgemein sieht man leicht, daß $\bar\partial\rho\lrcorner_\beta\,\mathcal{A}^b_{(\mu,\nu)} = \mathcal{A}^b_{(\mu,\mu-2)}$ oder höher.

Wir berechnen als nächstes $\bar\partial_\zeta\mathcal{N}_q^b$. Dabei wissen wir, daß $\bar\partial_z\partial_\zeta\bar v\big|_t = \mathcal{E}_0$ gilt, und durch explizites Differenzieren von $\bar v$ zeigt man, daß $\bar\partial_\zeta\partial_\zeta\bar v = \mathcal{E}_2$ ist. Damit erhalten wir

$$\bar\partial_\zeta(\bar\partial_z\partial_\zeta\bar v\big|_t)^q = \mathcal{E}_1,$$

also

$$\begin{aligned}\bar\partial_\zeta\mathcal{N}_q^b &= \frac{c_{n,q,\alpha}(n+\alpha-q-1)}{q}\frac{\bar\partial_\zeta v\wedge(\bar\partial_z\partial_\zeta\bar v\big|_t)^q}{v^{n+\alpha-q}\bar v^q} + \frac{\mathcal{E}_1}{v^{n+\alpha-q-1}\bar v^q}\\ &= (-1)^{q-1}\frac{c_{n,q-1,\alpha}}{q}\frac{\bar\partial_\zeta v\wedge(\bar\partial_z\partial_\zeta\bar v\big|_t)^q}{v^{n+\alpha-q}\bar v^q} \quad + \mathcal{F}^b\\ &= (-1)^{q-1}\frac{c_{n,q-1,\alpha}}{q}\frac{\sum_{i=1}^n(\bar L_i v)\,\bar e_i\wedge(\sum_{j=1}^{n-1}e_j\wedge e_j^*)^q}{v^{n+\alpha-q}\bar v^q} \quad + \mathcal{F}^b,\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{F}^b = \mathcal{A}^b_{(5,3)}\wedge\bar e^1 + \sum_{j=2}^n\mathcal{A}^b_{(6,4)}\wedge\bar e^j$ als Fehlerterm auftaucht.[18] Entsprechend ist $\bar\partial\mathcal{N}_q^b$ von der Form $\mathcal{A}^b_{(2,0)}\wedge\bar e^1 + \sum_{j=2}^n\mathcal{A}^b_{(3,1)}\wedge\bar e^j$.

[18] Die etwas umständliche Notation für $\mathcal{F}^b$ ist nur vorübergehend nötig, da dieser vom Grad $(q,1;0,q)$ ist und unsere Typnotation nur Kerne erfaßt, die vom Grad $(q,0)$ in ζ sind.

Wenn wir $-i(\beta - \frac{\gamma}{B})$ mittels $\mathfrak{E}$ darstellen, erhalten wir

$$-i(\beta - \frac{\gamma}{B}) = \sum_{i=1}^{n} e_i \wedge \bar{e}_i \;-\; \frac{|\partial\rho|^2}{-\rho + |\partial\rho|^2} e_1 \wedge \bar{e}_1$$
$$= \frac{(-\rho)}{-\rho + |\partial\rho|^2}\, e_1 \wedge \bar{e}_1 + \sum_{j=2}^{n} e_j \wedge \bar{e}_j,$$

und aus der Formel für $\bar{\partial}\mathcal{N}_q^b$ lesen wir ab, daß

$$\frac{(-\rho)}{-\rho + |\partial\rho|^2}\, e_1 \wedge \bar{e}_1 \lrcorner_\beta \bar{\partial}\mathcal{N}_q^b = \mathcal{A}^b_{(7,5)},$$

denn natürlich ist auch der explizite Anteil von $\bar{\partial}_\zeta \mathcal{N}_q^b$ ohne e_1-Differential, wenn dies für $\mathcal{N}_q^b$ galt. Ebenso folgt für den ersten Summanden des Fehlerterms $\mathcal{F}^b$

$$\frac{(-\rho)}{-\rho + |\partial\rho|^2}\, e_1 \wedge \bar{e}_1 \lrcorner_\beta \mathcal{A}^b_{(5,3)} \wedge \bar{e}^1 \;=\; \bar{e}^1 \lrcorner_\beta \mathcal{A}^b_{(5,3)} \wedge \bar{e}_1 \;=\; \mathcal{A}^b_{(5,3)}.$$

Für den Rest des Fehlerterms gilt sogar

$$\sum_{j=2}^{n} e_j \wedge \bar{e}_j \lrcorner_\beta \mathcal{F}^b \;=\; \sum_{j=2}^{n} e_j \wedge \bar{e}_j \lrcorner_\beta \sum_{k=2}^{n} \mathcal{A}^b_{(6,4)} \wedge \bar{e}^k \;=\; \mathcal{A}^b_{(6,4)}.$$

Insgesamt wissen wir also, daß

$$\bar{\partial}_\zeta^* \mathcal{N}_q^b = (-1)^{q-1} \frac{c_{n,q-1,\alpha}}{q} \sum_{k=2}^{n} e_k \wedge \bar{e}_k \lrcorner_\beta \frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{L}_i v)\, \bar{e}_i \wedge (\sum_{j=2}^{n} e_j \wedge e_j^*)^q}{v^{n+\alpha-q}\bar{v}^q} \;+\; \mathcal{A}^b_{(5,3)}$$
$$= \frac{(-1)^{q-1} c_{n,q-1,\alpha}}{q} \frac{(\sum_{i=2}^{n} \bar{e}_k \lrcorner_\beta (\bar{L}_i v) \sum_{j=2}^{n} e_j \wedge e_j^*)^q}{v^{n+\alpha-q}\bar{v}^q} \;+\; \mathcal{A}^b_{(5,3)}$$
$$= (-1)^{q-1} c_{n,q-1,\alpha} \frac{\sum_{i=2}^{n} (\bar{L}_i v) e_i^* \wedge (\sum_{j=2}^{n} e_j \wedge e_j^*)^{q-1}}{v^{n+\alpha-q}\bar{v}^q} \;+\; \mathcal{A}^b_{(5,3)}.$$

$\bar{L}_i v$ ist dabei ein $\mathcal{E}_1$-Anteil, folglich ist der explizite Anteil dieser Formel vom Typ $(3,1)$. Der Vergleich mit dem Ausdruck (21) für $K_q^{*,b}$ zeigt, daß uns nur noch die folgende Identität fehlt:

$$\sum_{i=2}^{n} (\bar{L}_i v) e_i^* = -\bar{\partial}_z \bar{v}\big|_t + \mathcal{E}_2.$$

Da $\bar{\partial}_z \bar{v}\big|_t = \sum_{i=2}^{n} (\bar{\Lambda}_i \bar{v}) e_i^*$ ist, entspricht diese Aussage dem folgenden Lemma:

Lemma 23.

$$\bar{L}_i v = -\bar{\Lambda}_i \bar{v} + \mathcal{E}_2 \qquad \textit{für } i = 2, \ldots, n.$$

Beweis. Die Aussage ist eine Konsequenz aus Lemma I 84 *iv*): $\bar{\Lambda}_j$ ist ein antiholomorph tangentiales Vektorfeld. In der dortigen Notation ist $\widetilde{\bar{\Lambda}_j} = \bar{L}_j$, also gilt

$$(\bar{\Lambda}_j + \bar{L}_j)(v + \bar{v}) = \mathcal{E}_2$$

(im Gegensatz zur Formulierung im Lemma taucht kein Term $\mathcal{E}_0\rho$ oder $\mathcal{E}_0 r$ auf, da die Vektorfelder rein tangential sind[19]). Da aber ohnehin $\bar{\Lambda}_j v = \mathcal{E}_2$ und $\bar{L}_j \bar{v} = \mathcal{E}_2$ gilt, ist

$$\bar{\Lambda}_j \bar{v} + \bar{L}_j v = (\bar{\Lambda}_j + \bar{L}_j)(v + \bar{v}) + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2,$$

und daraus ergibt sich die Behauptung.

Damit ist auch die letzte Eigenschaft, $\bar{\partial}^*_\alpha \mathcal{N}^b_q = \mathcal{K}^{*,b}_{q+1} + \mathcal{A}^b_{(4,2)}$, gezeigt und somit der Beweis von Satz 14 abgeschlossen.

Satz 24. *Es seien für das Gebiet $\tilde{D}$ und das Gewicht $\alpha - 1$ Kerne $\tilde{\mathcal{K}}^b$, $\tilde{\mathcal{K}}^{*,b}$ und $\tilde{\mathcal{N}}^b$ definiert wie durch die Formeln* (11), (12) *bzw.* (15) *beschrieben. Dann erfüllen diese die Voraussetzung von Theorem 1, d.h. es handelt sich um die Hauptteile der Operatoren $\mathbf{K}^b_{\alpha-1}$, $\mathbf{K}^{*,b}_{\alpha-1}$ und $\mathbf{N}^b_{\alpha-1}$, und die aus ihnen durch Dimensionsübergang gewonnenen Kerne $\mathcal{K}'_\alpha$, $\mathcal{K}'^*_\alpha$ und $\mathcal{N}'_\alpha$ sind die Hauptteile von $\mathbf{K}_\alpha$, $\mathbf{K}^*_\alpha$ und $\mathbf{N}_\alpha$.*

Beweis. Von den Voraussetzungen in Theorem 1 müssen nur noch zeigen, daß die konstruierten Operatoren tangentialen Formen wiederum auf tangentiale Formen abbilden und daß die induzierten Operatoren $L^2_\alpha(D)$-stetig sind. Die übrigen Eigenschaften folgen aus der Konstruktion mittels Theorem 10 bzw. Satz 14.

Diese erste Aussage ist ein Spezialfall des folgenden Lemmas:

Lemma 25. *Es sei $\mathcal{T}^b(\zeta, \xi; z, w)$ ein tangential zulässiger Integralkern auf $\tilde{D} \times b\tilde{D}$, der nur aus einer Kombination der Bestandteile ρ, r, $\tilde{v}$, $\bar{\tilde{v}}$, $\tilde{v}^*$, $\overline{\tilde{v}^*}$ und der Anwendung einer Kombination der Operatoren $\bar{\partial}$ oder ∂ bezüglich ζ oder z auf diese besteht. Dann bildet der zu $\mathcal{T}^b$ gehörige Operator T^b Formen, die invariant auf $\tilde{D}$ sind, auf Formen ab, die invariant auf $b\tilde{D}$ sind.*

Beweis. Im Gebiet $\tilde{D}$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\zeta, \xi) &= \rho(z) + |\xi|^2, \\ \tilde{r}(z, w) &= r(z) + |w|^2, \\ \tilde{v}(\zeta, \xi; z, w) &= v(\zeta, z) + \bar{\xi} w \end{aligned}$$

und entsprechende Zusammenhänge für $\bar{\tilde{v}}$, $\tilde{v}^*$, $\overline{\tilde{v}^*}$.

Es sei nun $\tau_t(z, w) := (z, e^{it} w)$ eine Rotation um t in der letzten Komponente, wie in der Definition II 52 von Invarianz eingeführt. Dann sieht man, daß für jede Form oder Funktion dieser Gestalt eine Rotation um t in der (z, w) Variablen gerade einer Rotation

[19] Selbst mit einer Charakterisierung $\bar{L}_i v = -\bar{\Lambda}_i \bar{v} + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_0\rho + \mathcal{E}_0 r$ wären die auftretenden Kerne noch von genügend hohem Typ, um die Aussage des Satzes zu sichern.

um $-t$ in (ζ,ξ) entspricht, d. h. wenn der obere Index bezeichnet, ob die Drehung in (z,w) oder in (ζ,ξ) auszuführen ist, erhalten wir zunächst

$$\tilde{a}\circ\tau_t^z=\tilde{a}\circ\tau_{-t}^\zeta,$$

wobei $\tilde{a}$ für eine beliebige der Grundfunktionen steht und die Gleichung die Fälle $\tilde{\rho}$ und $\tilde{r}$ einschließt, bei denen beide Rotationen gar keine Wirkung zeigen. Bei Anwendung der Differentialoperatoren auf die Grundfunktionen bleibt diese Eigenschaft erhalten, da die Rotationen τ holomorphe Abbildungen sind und der Pull-back daher mit ∂ und $\bar{\partial}$ kommutiert.

Mittels dieser Formel erhalten wir:

$$\begin{aligned}
T^b f(z,w)\circ\tau_t^z &= \int\limits_{\tilde{D}}(-\tilde{\rho})^{\alpha-1}\big\langle f,\overline{\mathcal{T}^b}\circ\tau_t^z\big\rangle_\Omega dV\\
&= \int\limits_{\tilde{D}}(-\tilde{\rho})^{\alpha-1}\big\langle f,\overline{\mathcal{T}^b}\circ\tau_{-t}^\zeta\big\rangle_\Omega dV\\
&= \int\limits_{\tilde{D}}(-\tilde{\rho}\circ\tau_t^\zeta)^{\alpha-1}\big\langle f\circ\tau_t^\zeta,\overline{\mathcal{T}^b}\big\rangle_\Omega dV,
\end{aligned}$$

denn das Integrationsgebiet $\tilde{D}$ ist nach Konstruktion rotationssymmetrisch in ξ,

$$= \int\limits_{\tilde{D}}(-\tilde{\rho})^{\alpha-1}\big\langle f,\overline{\mathcal{T}^b}\big\rangle_\Omega dV,$$

denn $\tilde{\rho}(\zeta,\xi)=\rho(\zeta)+|\xi|^2$, also invariant, und f ist ohnehin invariant nach Voraussetzung,

$$= T^b f(z,w),$$

was zu zeigen war.

Als letztes bleibt zu beweisen:

Satz 26. *Die induzierten Operatoren der Kerne $\tilde{\mathcal{K}}$, $\tilde{\mathcal{K}}^*$ und $\tilde{\mathcal{N}}$ sind stetig auf L^2_α, ebenso alle $\mathcal{A}$-Fehlerterme und deren ∂_ζ-Ableitungen.*

Beweis. Die Aussage ergibt sich für jeden der Operatoren jeweils mit Hilfe von Theorem II 95. Wir beginnen mit den expliziten Operatoren $\tilde{N}^b$, $\tilde{K}^b$ und $\tilde{K}^{b*}$, deren Form als Randwerte zulässiger Operatoren wir aus Satz 19 kennen. Von $\tilde{N}^b$ stellen wir dabei fest, daß es gerade die Form hat, welche wir in Theorem II 90 d) untersucht haben. Daraus erhalten wir, der Kern den transformierten Typ $[2,2;2,2]$ hat. In $\tilde{\mathcal{K}}^b$ zerlegen wir den Zähler zu

$$\partial_\zeta\tilde{\bar{v}}\wedge(\bar{\partial}_z\partial_\zeta\tilde{\bar{v}})^q=\partial_\zeta\tilde{\bar{v}}\wedge(\bar{\partial}_z\partial_\zeta\bar{v})^q+q\partial_\zeta\bar{v}\wedge dw\wedge d\xi\wedge(\bar{\partial}_z\partial_\zeta\bar{v})^{q-1}$$

und wenden Theorem II 90 b) bzw. Satz II 73 an. Es entsteht zum einen ein Kern vom transformierten Typ $[2,1;1,1]$, zum anderen ein Kern, der nach Theorem II 87 und der anschließenden Bemerkung transformierten Typ $[1,0;1,1]$ hätte. Dabei wird aus dem $d\xi$-Differential jedoch ein $\partial\rho$-Differential, das mit $\partial_\zeta v$ zu einem $\mathcal{E}_1$- statt nur $\mathcal{E}_{(0,1)}$-Term wird. Damit verbleibt insgesamt für $\tilde{\mathcal{K}}^b$ der zulässige Typ $[2,1;1,1]$. Analog zerlegen wir den Nenner von $\tilde{\mathcal{K}}^{b*}$ zu

$$\bar{\partial}_z^b\tilde{\tilde{v}} \wedge (\bar{\partial}_z\partial_\zeta\tilde{\tilde{v}})^q = \bar{\partial}_z^b\tilde{\tilde{v}} \wedge (\bar{\partial}_z\partial_\zeta\bar{v})^q + q\bar{\partial}_z\bar{v} \wedge d\bar{w} \wedge d\xi \wedge (\bar{\partial}_z\partial_\zeta\bar{v})^{q-1}.$$

$(\tilde{\mathcal{K}}^{b*})'$ ist damit nach Theorem II 90 b) die Summe eines $[2,1;0;1]$ und eines $[1,0;0,0]$-Kerns. Doch auch hier entsteht im zweiten Summanden ein weiterer $\mathcal{E}_1$-Term, nämlich $\bar{\partial}_z\bar{v} \wedge \bar{\partial}r$ statt des $\mathcal{E}_0$-Terms $\bar{\partial}_z\bar{v} \wedge d\bar{w}$, so daß der von $\tilde{\mathcal{K}}^{b*}$ induzierte Operator schließlich Typ $[2,1;0,1]$ hat. In der Tat stellt man so fest, daß dies das allgemeine Verhalten von Kernen ist, die nur aus $\tilde{v}$ und $\tilde{\tilde{v}}$ sowie deren Differentialen entstehen.

Nur die Fehlerterme $\mathcal{A}^b$ vom Typ $(4,2)$ sind von genügend hohem Typ, um aus Theorem II 87 folgern zu können, daß sie Operatoren vom zulässigen Typ mindestens $[2,1;1,1]$ induzieren. Um die Kerne vom Typ $(3,2)$ und die Ableitungen der Fehlerkerne zu beschreiben, müssen wir jedoch zur Definition der Kernbestandteile in Theorem 10 zurückkehren: Wenn wir diese in $\tilde{D}$ bilden, stellen wir fest, daß bezüglich der Koordinaten ξ und $\bar{w}$ durch Ableiten keine neuen Fehlerterme entstehen. Insbesondere gelten

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{ij} &= \rho_{ij} \qquad \text{für } i,j = 1,\dots,n+1,\\
\tilde{v}^* - \tilde{v} &= v^* - v,\\
\partial_{\tilde{\zeta}}\tilde{v} &= \partial_\zeta v = \mathcal{E}_2'(\zeta,z),\\
\bar{\partial}_{\tilde{z}}\tilde{v} &= \bar{\partial}_z v = \mathcal{E}_2'(\zeta,z)
\end{aligned}$$

und weitere Identitäten dieser Art. Daraus ergibt sich, daß außer den schon bekannten Kernbestandteilen $\partial_\zeta\tilde{\tilde{v}}$, $\bar{\partial}_z\tilde{\tilde{v}}$ und $\partial_\zeta\bar{\partial}_z\tilde{\tilde{v}}$ nur Faktoren $\mathcal{E}_j'$ auftreten, die ausschließlich von ζ und z abhängen. Diese bleiben von $\mathcal{R}$ und $\bar{M}$ jedoch unbeeinflußt und wir können jeweils wie im Fall von $\tilde{\mathcal{K}}^b$ und $\tilde{\mathcal{K}}^{b*}$ die Nenner zerlegen und Theorem II 90 anwenden. Für die Terme der niedrigsten Ordnung erhalten wir so wiederum transformierte Typen von mindestens $[2,1;1,1]$ bzw. $[2,1;0,1]$. Terme höherer Ordnung könnten wir ohne Ansicht des Kerns auch wiederum nur mit Theorem II 87 abschätzen.

Für alle Operatoren, die mindestens zulässigen Typ $[2,1;1,1]$ haben, erhalten wir schließlich nach Theorem II 95 die Stetigkeit auf L^2_α sind, und daß sie den Raum sogar noch um bis zu einer Potenz der Randfunktion verbessern. Der Operator, der aus $\tilde{\mathcal{K}}^{b*}$ entsteht, und einige zugehörige Fehlerterme sind jedoch nur vom Typ $[2,1;0,1]$. Sie verringern das benötigte Gewicht nicht, sind aber nach der Bemerkung im Anschluß an das Theorem zumindest noch stetig von L^2_α nach L^2_α für $\alpha > 1$, was zu zeigen war.

Bemerkung 27. Die Typanalyse im letzten Satz zeigt, was wir bei der Vorstellung des Kern $Z_3'^a$ im Beweis von Theorem 1 bereits erwähnt hatten: $Z_3'^a$ ist nur im erweiterten Sinn asymtotisch transformiert, da in der Iteration Kerne auftauchen, die nur Typ $[2,1;0,1]$ haben. Dies reicht jedoch, um das folgende Regularitätsergebnis zu zeigen.

Satz 28. *Es sei $1 < \vartheta \leq \alpha$. Dann sind $\mathbf{N}_\alpha$ und $\mathbf{K}_\alpha$ auch stetig als Operatoren*

$$\mathbf{N}_\alpha : L^2_\vartheta(D) \to L^2_\kappa(D) \qquad \textit{für } \kappa > 1 \textit{ mit } \vartheta - \kappa < 2.$$
$$\mathbf{K}_\alpha : L^2_\vartheta(D) \to L^2_\kappa(D) \qquad \textit{für } \kappa > 1 \textit{ mit } \vartheta - \kappa < 1.$$

Beweis. Für N' bzw. K' ist diese Aussage eine Folgerung von Theorem II 95. Alle verbleibenden zulässigen Operatoren in der asymptotischen Entwicklung (7) und (8) sind von einer Form, daß sie zumindest $L^2_\vartheta(D) \to L^2_\vartheta(D)$ für $1 < \vartheta \leq \alpha$ abbilden, jedoch nicht unbedingt das benötigte Gewicht verringern.

Eine Analyse der Fehlerterme von Typ $[2, 1; 0, 1]$ zeigt nun, daß nur in derjenigen Komponente tatsächlich keine Verbesserung stattfindet, welche eine nicht-tangentiale auf eine tangentiale Form abgebildet. Dies kann schon bei zweimaliger Anwendung des Operators nicht mehr als einmal passieren. Man folgert, daß mindestens ein transformierter Z-Operator im erweiteren Sinn der Ordnung k entsteht, wenn wir die Iteration in den Fehlertermen $2k$-mal durchführen.

Da der Fehlerterm $Z_3'^a$ nur aus einem Anteil besteht, der eine Anwendung von $\mathcal{N}'$ beinhaltet, und einem Anteil, von dem wir eine beliebige Mindestzahl von Anwendungen der Fehleroperatoren voraussetzen können, identifizieren wir $Z_3'^a$ als asymptotisch transformiert zulässig im erweiterten Sinn, so daß auch er die gewünschte Abbildungseigenschaft hat, woraus sich die Behauptung für $\mathbf{N}_\alpha$ ergibt. Analog verläuft die Argumentation für $\mathbf{K}_\alpha$.

Bemerkung 29. Unter Verwendung von gewichteten L^p-Räumen, ähnlich wie in den Sätzen I 57–59, sollte es auch möglich sein, analog zu Satz II 104 eine Fortsetzung der Operatoren auf L^p-Räume mit $2 \leq p < \infty$ zu erreichen. Da ohnehin $L^p \subset L^2 \subset L^2_\alpha$ für $\alpha > 1$ gilt, muß man dazu nur die Beschränktheit in passender L^p-Norm zeigen. Dazu ist es möglich auszunutzen, daß die Operatoren vom Typ $[2, 1; 0, 1]$ zwar nicht $L^p \to L^p$, aber für beliebig kleines $\delta > 0$ noch $L^p \to L^{p,\delta}$ abbilden, wobei $L^{p,\delta} := \{f : \int (-\rho)^\delta |f|^p dV < \infty\}$. Man gewinnt dann in jedem zweiten Iterationsschritt mehr hinzu, als man in den Zwischenschritten verliert. Wir führen die Konstruktion jedoch nicht durch, da der Nutzen wohl eher klein in Verhältnis zum benötigten Aufwand wäre.

Für $1 \leq p < 2$ ist auf ein solches Ergebnis nicht zu hoffen, im Gegensatz zu [LiM 02], wo dies durch ein Dualitätsargument zwischen den Räumen L^p und $L^{p'}$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und die Inklusion $L^2 \subset L^p$ für $1 \leq p < 2$ geschehen konnte. Obwohl die Operatoren der Hauptteile $\mathcal{N}'$ und $\mathcal{K}'$ in unserem Fall auch für $1 \leq p < 2$ jeweils stetige Operatoren auf L^p sind, erlaubt unsere Situation es nicht, analog zu Lieb und Michel vorzugehen, da wir schon von auftretenden abstrakt definierten Operatoren $\mathbf{N}_\alpha$ und $\mathbf{K}_\alpha$ nur $L : L^2_\alpha \to L^2_\alpha$ voraussetzen können, aber zwischen L^2_α und L^p für $1 \leq p < 2$ selbst durch Variation des Gewichts keine Inklusionsbeziehung herstellbar ist.[20]

[20]Wir betonen diese Tatsache an dieser Stelle so sehr, da bisweilen von dem Gewichtsfaktor $(-\rho)^\alpha$ die Rede war als „Gewicht, das benötigt wird, um eine Form f integrierbar zu machen“. Diesem liegt die Anschauung zugrunde, daß Formen, die nicht in $L^2(D)$ liegen, weil sie zum Rand des Gebiets zu stark anwachsen, gegen ein Gewicht $(-\rho)^\alpha$ mit großem α doch integrierbar sein und folglich in L^2_α liegen können. Für ein allgemeines $f \in L^p \setminus L^2$ mit $1 \leq p < 2$ ist dies jedoch nicht möglich, z.B. da kein solcher Gewichtsfaktor einer Singularität, die *innerhalb des Gebiets* liegt, entgegenwirken kann.

2.4 Ein expliziter Ausdruck für $\mathbf{N}_\alpha$

Wir haben bei der Konstruktion des Dimensionsübergangs darauf Wert gelegt, daß alle Operationen durch explizite Formeln gegeben waren. Wir haben daher die Möglichkeit, die Wirkung der Operatoren $\mathcal{R}$ und M auf die Kerne $\mathcal{N}^b_{\alpha-1}$ und $\mathcal{K}^b_{\alpha-1}$ tatsächlich nachzuvollziehen und auf diese Weise die entsprechenden Kerne $\mathcal{N}'_q$ und $\mathcal{K}'_q$ wiederum explizit zu bestimmen. Wir werden dies nur für $(0,q)$-Formen mit $1 \le q \le n-1$ durchführen, da durch den auftretenden Logarithmus bei $q = 0$ zu viele Fallunterscheidungen benötigt würden, und im Fall $q = n$ die Verwendung der Jacobi-Polynome nicht mehr möglich ist, da die Bedingung $j - \alpha - \delta - 2 \in \mathbb{N}$ in Defintion II 67 nicht mehr erfüllt ist.[21]

Theorem 30. *Es sei $\alpha > 1$. Dann hat der Hauptteil des Kerns des Neumannoperators $\mathbf{N}_\alpha$ für $(0,q)$-Formen mit $1 \le q \le n-1$ die Form:*

$$\begin{aligned}\mathcal{N}'_q = {} & \frac{-\varepsilon_{q+1}\Gamma(\alpha)(n-q-1)!}{q\,\Gamma(n+\alpha)} \frac{P^{\alpha-1,-n+1}_{n-q-1}(1-2|a|^2)}{v^{n+\alpha-q-1}\bar{v}^q(1-|a|^2)^{n-1}} (\bar{\partial}_z \partial_\zeta \bar{v})^q \\ & + \frac{-\varepsilon_{q+1}\Gamma(\alpha)(n-q-1)!}{\Gamma(n+\alpha)} \frac{P^{\alpha,-n+1}_{n-q-1}(1-2|a|^2)}{v^{n+\alpha-q}\bar{v}^q(1-|a|^2)^{n-1}} (\bar{\partial}_z \partial_\zeta \bar{v})^{q-1} \wedge \bar{\partial} r \wedge \partial \rho.\end{aligned}$$

Die Hauptteile des kanonischen Lösungsoperators $\mathbf{K}_\alpha$ bzw. dessen Adjungierten $\mathbf{K}^*_\alpha$ haben die Form

$$\begin{aligned}\mathcal{K}'_q = {} & -\varepsilon_{q+1} \frac{\Gamma(\alpha)(n-q-1)!}{\Gamma(n+\alpha)} \frac{P^{\alpha-1,-n}_{n-q-1} \partial_\zeta \bar{v} \wedge (\bar{\partial}_z \partial_\zeta \bar{v})^q}{v^{n+\alpha-q-1}\bar{v}^q(1-|a|^2)^{n-1}} \\ & - \varepsilon_{q+1} \frac{\Gamma(\alpha)(n-q-1)!}{\Gamma(n+\alpha)} \frac{(-r)P^{\alpha,-n}_{n-q-1} \partial\rho \wedge (\bar{\partial}_z \partial_\zeta \bar{v})^q}{v^{n+\alpha-q}\bar{v}^q(1-|a|^2)^{n-1}} \\ & + \varepsilon_{q+1} \frac{q\Gamma(\alpha)(n-q-1)!}{\Gamma(n+\alpha)} \frac{P^{\alpha,-n}_{n-q-1} \partial\rho \wedge \partial_\zeta \bar{v} \wedge \bar{\partial} r \wedge (\bar{\partial}_z \partial_\zeta \bar{v})^{q-1}}{v^{n+\alpha-q}\bar{v}^q(1-|a|^2)^{n-1}}, \\ \mathcal{K}'^*_{q+1} = {} & -\varepsilon_{q+1} \frac{\Gamma(\alpha)(n-q-1)!}{\Gamma(n+\alpha)} \frac{P^{\alpha-1,-n}_{n-q-1} \bar{\partial}_z \bar{v} \wedge (\bar{\partial}_z \partial_\zeta \bar{v})^q}{v^{n+\alpha-q-1}\bar{v}^q(1-|a|^2)^{n-1}} \\ & - \varepsilon_{q+1} \frac{\Gamma(\alpha)(n-q-1)!}{\Gamma(n+\alpha)} \frac{(-\rho)P^{\alpha,-n}_{n-q-1} \bar{\partial} r \wedge (\bar{\partial}_z \partial_\zeta \bar{v})^q}{v^{n+\alpha-q}\bar{v}^q(1-|a|^2)^{n-1}} \\ & + \varepsilon_{q+1} \frac{q\Gamma(\alpha)(n-q-1)!}{\Gamma(n+\alpha)} \frac{P^{\alpha,-n}_{n-q-1} \bar{\partial} r \wedge \bar{\partial}_z \bar{v} \wedge \partial\rho \wedge (\bar{\partial}_z \partial_\zeta \bar{v})^{q-1}}{v^{n+\alpha-q}\bar{v}^q(1-|a|^2)^{n-1}},\end{aligned}$$

wobei wie zuvor $P^{\alpha,\beta}_m = P^{\alpha,\beta}_m(1-2|a|^2)$ die Jacobi-Polynome bezeichnet und $a := \frac{\sqrt{-r}\sqrt{-\rho}}{v}$.

Beweis. Der Beweis besteht in der Anwendung von Theorem II 90 auf die verschiedenen Ausgangskerne. Wenn wir $\tilde{\mathcal{N}}^b_q$ im Raum $L^2_{\alpha-1}(\tilde{D})$ nach Formel (15) bilden, ergibt sich, daß

$$\tilde{\mathcal{N}}^b_q(\zeta,\xi;z,w) = \tilde{\mathcal{N}}_q(\zeta,\xi;z,w)\Big|_t$$

[21] Dieses Verhalten ist insofern nicht verwunderlich, als die eigentliche Behandlung des Neumannproblems im $\mathbb{C}^{n+1}$ stattfindet, wo $(0,n)$-Formen die exzeptionelle Kodimension 1 haben.

für den zulässigen Kern

$$\tilde{\mathcal{N}}_q(\zeta, \xi; z, w) := -\varepsilon_{q+1} \frac{\Gamma(n+\alpha-q-1)}{\Gamma(n+\alpha)q} \frac{(\bar{\partial}_z \partial_\zeta \tilde{\bar{v}})^q}{\tilde{v}^{n+\alpha-q-1} \tilde{\bar{v}}^q},$$

welches wir bereits zuvor als von einer Form identifiziert hatten, wie in Teil d) des Theorems untersucht wird. Zur Berechnung von $\mathcal{N}'$ können wir $\tilde{\mathcal{N}}_q(\zeta, z)$ statt $\tilde{\mathcal{N}}_q^b(\zeta, z)$ für den Dimensionsübergang verwenden, da wir bereits wissen, daß für jedes invariante φ auf $b\tilde{D}$ gilt, daß $\mathcal{R}f = \mathcal{R}f_t$. Die zwei resultierenden Summanden haben eine gemeinsame führende Konstante $\frac{\Gamma(\alpha)(n-q-1)!}{\Gamma(n+\alpha-q-1)}$, die wir in den bisherigen Vorfaktor mit aufnehmen.

Für $\mathcal{K}'$ bzw. $\mathcal{K}'^*$ verwenden wir entsprechend die anderen Fälle in Theorem II 90. Die Differentiale der nach Formel (11) bzw. (12) in $L^2_{\alpha-1}(\tilde{D})$ gebildeten Kerne $\tilde{K}_q^b$ und $\tilde{K}_{q+1}^{*b}$ zerlegen wir dabei wie im Beweis von Satz 26 zu

$$\partial_\zeta \tilde{\bar{v}} \wedge (\bar{\partial}_z \partial_\zeta \tilde{\bar{v}})^q = \partial_\zeta \bar{v} \wedge (\bar{\partial}_z \partial_\zeta \bar{v})^q + q \partial_\zeta \bar{v} \wedge d\bar{w} \wedge d\xi \wedge (\bar{\partial}_z \partial_\zeta \bar{v})^{q-1}$$

und

$$\bar{\partial}_z \tilde{\bar{v}} \wedge (\bar{\partial}_z \partial_\zeta \tilde{\bar{v}})^q = \bar{\partial}_z \bar{v} \wedge (\bar{\partial}_z \partial_\zeta \bar{v})^q + q \bar{\partial}_z \bar{v} \wedge d\bar{w} \wedge d\xi \wedge (\bar{\partial}_z \partial_\zeta \bar{v})^{q-1}$$

und verwenden die Teile b) und c) des Theorems. Da die Rechnungen für $\mathcal{K}'$ und $\mathcal{K}'^*$ schon in [Lam 00] durchgeführt wurden, führen wir sie hier nicht noch einmal aus.

Teil IV

Anhang

1 Zusammenfassung und Diskussion

Das Ziel dieser Dissertation war die möglichst vollständige Charakterisierung des Neumannoperators in den Räumen $L^2_\alpha(D)$ mit Angabe einer expliziten Formel für seinen Hauptteil. Die hierzu gewählte Methode kombiniert Untersuchungen von Lieb et al. über den Neumannoperator in Gebieten mit Levimetrik mit der Methode des Dimensionsübergangs, wie von Andersson et al. vorgestellt.

Dazu war es notwendig, die übliche Definition *zulässiger Kerne* zu erweitern, und zu zeigen, daß die entstehende erweiterte Klasse von Operatoren die gleichen grundlegenden Eigenschaften hat wie die bekannte Klasse zulässiger Operatoren. Besonderen Wert legten wir auf die Untersuchung der Randwerte zulässiger Kerne. Dabei konnten wir – aufbauend auf Ergebnisse von Hefer – klären, unter welchen Typvoraussetzungen die Distributionsrandwerte zulässiger Operatoren bei Anwendung auf L^p-Formen mit ihren Einschränkungsrandwerten übereinstimmen, was in dieser Form zuvor noch nicht untersucht worden war.

Ein Schwerpunkt lag auf der Untersuchung der tangentialen Regularität zulässiger Operatoren, aus welcher sich eine *Vertauschungsrelation* ergab zwischen tangentialen Vektorfeldern und beliebigen zulässigen Operatoren von positivem Typ. Dies ermöglichte uns zu zeigen, daß die Randwerte der von uns betrachteten zulässigen Operatoren im Sinne von $C^k(D) \to C^k(bD)$ Differenzierbarkeit bewahren. Dies ist ein neues Ergebnis, selbst für die ursprüngliche Klasse zulässiger Operatoren. Weitergehende Regulärität, etwa eine Abbildungseigenschaft $C^k(\overline{D}) \to C^k(\overline{D})$, sind von diesen Operatoren nicht zu erwarten, wie ein einfaches Beispiel zeigt.

Im zweiten Abschnitt übertrugen wir diese Untersuchungen auf die L^2_α-Räume, denen eine gewichtete Bergmanmetrik zugrundeliegt. Durch die neu eingeführte Notation des *α-Typ* war es möglich, die bisherigen Sätze über zulässige Operatoren, welche von einer isotropen Metrik ausgehen, auf die L^2_α-Räumen zu übertragen, in denen die Metrik tangentialem und nicht-tangentialem Anteil einer Form unterschiedliches Gewicht gibt. Um sowohl der Anisotropie im Urbild- wie auch im Bildraum gerecht zu werden, ist jedoch die Angabe von bis zu vier Typwerten erforderlich, statt nur eines wie im isotropen Fall, was die Notation unhandlicher macht.

Die Methode des Dimensionswechsels, die wir anschließend vorstellten, setzt die L^2_α-Räume zweier Gebiete D und $\tilde{D}$, bzw. eines Gebietes D und des Randes $b\tilde{D}$ miteinander in Beziehung. Ihr Ziel ist es, Fragestellungen wie die Lösung der Gleichung $\bar{\partial}u = f$ in $L^2_\alpha(D)$ in Fragestellungen auf $b\tilde{D}$ zu verwandeln, so daß nur die Randwerte der beteiligten Formen eingehen. Die gewonnenen Lösungen können anschließend explizit zurücktransformiert werden. Wir konnten dabei den zuvor fehlenden Schritt beweisen, daß diese Rücktransformation C^∞-Glattheit erhält, sowie weiterhin klären, unter welchen Voraussetzungen auch C^k-Glattheit bewahrt wird, bzw. in welchen Fällen eine Regularitätsordnung verloren geht.

Im Rest der Arbeit verwendeten wir die geschilderte Vorgehensweise, um den Neumannoperator $\mathbf{N}_\alpha$ für $L^2_\alpha(D)$ zu bestimmen. Dabei traten Vor- und Nachteile der Methode zutage: Da der Dimensionsübergang mit den Randwerten der auftretenden Operatoren arbeitet, ist er darauf angewiesen, daß Distributions- und Restriktionsrandwerte der Operatoren übereinstimmen. Dies ist bei Anwendung der von uns betrachteten zulässiger Operatoren auf glatte oder zumindest stetige Formen stets der Fall, so daß man schnell zu Ergebnissen kommt, wie sich $\mathbf{N}_\alpha$ auf diesen Formen verhält, u.a. daß der Neumannoperator $C^\infty(\overline{D})$-Glattheit bewahrt, was sich unter alleiniger Verwendung einer Homotopieformel für die tangentialen Randwerte des Operators $\mathbf{N}_\alpha$ im Gebiet $b\tilde{D}$ zeigen läßt.

Um weitergehende Fragen zu klären, stellten wir eine *asymptotische Entwicklung von* $\mathbf{N}_\alpha$ in der Form

$$\mathbf{N}_\alpha f = N'f + Z_3'^a f$$

auf, bei der wir N' mit explizitem Integralkern als Hauptteil von $\mathbf{N}_\alpha$ identifizierten und ein Bildungsschema für den Fehlerterm $Z_3'^a$ angaben. Wir mußten dazu *transformiert zulässige Kerne* einführen, die mit Hilfe des Dimensionsübergangs aus zulässigen Kernen entstehen, und wiederum über einen Typbegriff klassifizieren.

Es zeigte sich, daß der Dimensionsübergang wesentlich weniger gut dazu geeignet ist, die Anwendung von Operatoren auf Formen zu studieren, für die sie keine Randwerte im Sinne von Hefer besitzen. Ein Beispiel hierfür ist die Wirkung auf L^2_α selbst, und es zeigte sich, daß eine Abschätzung transformiert zulässiger Kerne ohne Umweg über den Rand des Gebiet $\tilde{D}$ nur deutlich schlechtere Aussagen zuläßt als dies bei zulässigen Kernen der Fall gewesen war. Der Grund hierfür ist, daß transformiert zulässige Kernen auf der gesamten Diagonale $\Delta \subset D \times D$ singulär werden, während für zulässige Kerne dies nur auf der Randdiagonalen $\Lambda \subset bD \times bD$ geschehen kann. Da eine im Inneren vorliegende Singularität jedoch nicht durch den Gewichtsfaktor ausgeglichen werden kann, welcher nur in Randnähe klein wird, verlieren wir beim Übergang zu transformierten Kernen bis zu drei Einheiten in der Typnotation.

Es war uns dennoch möglich, die Stetigkeit aller Operatoren

$$\mathbf{N}_\alpha, N', Z_3'^a : L^2_\vartheta(D) \to L^2_\vartheta(D) \qquad \text{für } 1 < \vartheta \leq \alpha$$

zu zeigen und auch, daß das auftretende Gewicht bei jeder Anwendung sogar reduziert werden kann. Jedoch benötigten wir dazu die genauere Untersuchung der Kerne einiger Fehlerterme, obwohl die Einteilung der Kerne in Typklassen gerade dazu hätte dienen sollen, solche Untersuchungen vermeidbar zu machen.

Es ist zu vermuten, daß ein Studium der iterierten Anwendung transformiert zulässiger Operatoren und der Verwendung gewichteter L^p-Räume auch den Beweis ermöglicht, daß $\mathbf{N}_\alpha : L^p(D) \to L^p(D)$ mit $p \geq 2$ abbildet. Wir haben auf eine Ausarbeitung jedoch verzichtet.

Dagegen scheinen die verwendeten Methoden weder eine Fortsetzung auf $L^p(D)$ mit $1 \leq p < 2$ noch Abschätzungen in $C^k(\overline{D})$-Norm zuzulassen. Das ist insofern unbefriedigend, als der Hauptteil N' diese Eigenschaften sehr wohl besitzt, jedoch die Typen der durch den Dimensionsübergang entstehenden Fehlerterme zu gering sind, als daß sich die Ergebnisse auf $\mathbf{N}_\alpha$ übertragen ließen. In gewisser Weise sind diese Komplikationen bereits in der Metrik von L^2_α angelegt: Wegen der unterschiedlichen Gewichtsfaktoren „bestraft“

diese alle Operatoren, welche nicht-tangentiale Formen auf tangentiale Formen abbilden. Während nun der Hauptteil N' diagonal wirkt und diese Schwierigkeit daher bei ihm nicht auftritt, können wir derartiges für die Fehlerterme nicht garantieren, ohne uns näher mit ihrer inneren Kernstruktur zu befassen.

Im letzten Abschnitt der Arbeit geben wir der Vollständigkeit halber einen expliziten Integralkern für N' an. Seine recht einfache Struktur verdient dabei eine gewisse Aufmerksamkeit; sie ist durchaus mit der euklidischen Situation vergleichbar. Der Kern ermöglicht uns jedoch keine weitergehenden Ergebnisse über $\mathbf{N}_\alpha$, da uns für die übrigen Terme der asymptotischen Entwicklung keine ähnlich einfachen Darstellungen zur Verfügung stehen.

Literatur

[AnB 00] Andersson, M., Boo, J., Approximate formulas for canonical homotopy operators for the $\bar{\partial}$ complex in strictly pseudoconvex domains. *Math. Scand.* **87**, 251–271 (2000)

[ABO 98] Andersson, M., Boo, J., Ortega-Cerdà, J., Canonical homotopy operators for the $\overline{\partial}$ complex in strictly pseudoconvex domains. *Bull. Soc. Math. France* **126**, no. 2, 245–271 (1998)

[AnC 95] Andersson, M., Carlsson, H., Formulas for approximate solutions of the $\partial\overline{\partial}$-equation in a strictly pseudoconvex domain. *Rev. Mat. Iberoamericana* **11**, 67–101 (1995)

[BeA 83] Berndtsson, B., Andersson, M. Henkin-Ramírez formulas with weight factors. *Ann. Inst. Fourier* **32**, 91–110 (1983)

[Bog 91] Boggess, A. *CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex.* Studies in Advanced Mathematics. Boca Raton, CRC Press., 1991

[Cum 90] Cumenge, A. Estimations Limites pour la Solution Canonique de l'Équation $\bar{\partial}u = f$. *Math. Ann.* **286**, 639–654 (1990)

[Die 70] Diederich, K., Das Randverhalten der Bergmanschen Kernfunktion und Metrik in streng pseudokonvexen Gebieten. *Math. Ann.* **187**, 9–36 (1970)

[FiL 74] Fischer, W., Lieb, I. Lokale Kerne und beschränkte Lösungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf q-konvexen Gebieten. *Math. Ann.* **208**, 249–265 (1974)

[FoK 72] Folland, G. B., Kohn, J. J. *The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex.* Ann. Math. St. **75**, Princeton 1972

[GrL 70] Grauert, H., Lieb, I. Das Ramírezsche Integral und die Lösung der Gleichung $\bar{\partial}f = \alpha$ im Bereich der beschränkten Formen. *Rice Univ. St.* **56**, 29–50 (1970)

[HaP 79] Harvey, R., Polking, J. Fundamental solutions in complex analysis. *Duke Math. J.* **46**, 253–300 (1979)

[HaP 84] Harvey, R., Polking, J. The $\bar{\partial}$-Neumann solution to the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation in the ball in $\mathbb{C}^n$. *Trans. Amer. Math. Soc.* **2**, 587–613 (1984)

[HaP 82] Harvey, R., Polking, J. The $\bar{\partial}$-Neumann kernel in the ball in $\mathbb{C}^n$. *Proc. Sympos. Pure Math.* **41**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 117–136 (1984)

[Hef 99] Hefer, T. Regularität von Randwerten der kanonischen Lösung der $\bar{\partial}$-Gleichung auf streng pseudokonkaven Gebieten. *Bonner Math. Schr.* **320** (1999)

[Hef 02] Hefer, T. On boundary values of integral operator. *erscheint in Math. Nach.*

[Hen 69] Henkin, G. M. Integral representations in strongly pseudoconvex domains and some applications. *Math. Sb.* **78**, 611–632 (1969)

[Hen 70] Henkin, G. M. Integral representations in strongly pseudoconvex domains and applications to the $\bar{\partial}$-problem. *Math. Sb.* **82**, 300–308 (1970)

[Hör 65] Hörmander, L. L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator. *Acta Math.* **113**, 89–152 (1965)

[Hör 66] Hörmander, L. *An introduction to complex analysis in several variables.* North Holland, Amsterdam etc., 1966

[Hör 02] Hörmander, L. L^2 *methods in the theory of functions of several complex variables.* Handout auf der NORDAN Konferenz, Reykjavik, 2002

[Ker 71] Kerzman, N. Hölder and L^p estimates for solutions of $\bar{\partial}u = f$ in strongly pseudoconvex domains. *Comm. Pure Appl. Math.* **24**, 301–379 (1971)

[Koh 63] Kohn, J. J. Harmonic integrals on strongly pseudoconvex domains I. *Ann. Math.* **78**, 112–148 (1963)

[Koh 64] Kohn, J. J. Harmonic integrals on strongly pseudoconvex domains II. *Ann. Math.* **79**, 450–472 (1964)

[Lam 00] Lampert, C. H. Kanonische Lösungsoperatoren für $\bar{\partial}u = f$ in streng pseudokonvexen Gebieten mit gewichteter Bergman-Norm. *Diplomarbeit, Universität Bonn, Mathematisches Institut* (2000)

[Lie 70] Lieb, I. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvexen Gebieten. Beschränkte Lösungen. *Math. Ann.* **190**, 6–44 (1970)

[Lie 72] Lieb, I. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvexen Gebieten. Stetige Randwerte. *Math. Ann.* **199**, 241–256 (1972)

[LiM 02] Lieb, I., Michel, J. *The Cauchy-Riemann Complex. Integral Formulae and Neumann Problem.* Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2002

[LiR 83] Lieb, I., Range, R. M. On integral representations and a priori Lipschitz estimates for the canonical solution of the $\bar{\partial}$-equation. *Math. Ann.* **265**, 221–251 (1983)

[LiR 86_1] Lieb, I., Range, R. M. Integral representations and estimates in the theory of the $\bar{\partial}$-Neumann problem. *Ann. Math.* **123**, 265–301 (1986)

[LiR 86_2] Lieb, I., Range, R. M. Estimates for a class of integral operators and applications to the $\bar{\partial}$-Neumann problem. *Inv. Math.* **85**, 415–438 (1986)

[LiR 87] Lieb, I., Range, R. M. The kernel of the $\bar{\partial}$-Neumann operator on strictly pseudoconvex domains. *Math. Ann.* **278**, 151–179 (1987)

[LiR 93] Lieb, I., Range, R. M. The $\bar{\partial}$-Neumann kernel for codimension-one forms on strictly pseudoconvex domains. *Sev. Cpl. Var. Princeton Math. Notes* **38**, 473–482 (1993)

[Ma 89] Ma Lan, Abschätzungen von Lösungen der $\bar{\partial}$-Gleichung auf streng q-konvexen Mengen mit nicht glattem Rand. *Bonner Math. Schr.* **201** (1989)

[Mic 91] Michel, J. Integral representations on weakly pseudoconvex domains. *Math. Z.* **208**, 437–462 (1991)

[Mic 92] Michel, J. Der Neumannoperator auf streng pseudokonkaven Gebieten und andere Anwendungen der Integralformelmethode. *Bonner Math. Schr.* **238** (1992)

[Ran 84] Range, R. M. *The $\bar{\partial}$-Neumann Operator on the Unit Ball in $\mathbb{C}^n$.* Math. Ann. **266** (1984), 449–456

[Ran 86] Range, R. M. *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables.* Springer, Berlin etc., 1986

[Rha 60] de Rham, G. *Variétés différentiables.* Herrmann, Paris, 1960

[Sch 94] Schuldenzucker, U. Regularität der kanonischen Lösung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Rand-L^p-Räumen, *Bonner Math. Schr.* **265** (1994)

[Sea 75] Seaborn, J. B. *Hypergeometric functions and their applications.* Springer, Berlin etc., 1991

[Swe 76] Sweeney, W. A condition for subellipticity in Spencer's Neumann problem. *J. Diff. Equ.* **21**, 316–362 (1976)

[Sze 75] Szegö, G. *Orthogonal Polynomials.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 23, New York, 1959

[Wei 99] Weisstein, E. W. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics.* CRC Press, Boca Raton, 1999